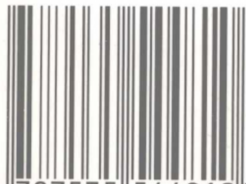
简明微积分发展史

数学学科专题史丛书

简明微积分发展史



数学学科专题史丛书

简明微积分发展史

Concise history of the Development of Calculus

龚升 林立军 著

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分发展史/龚升，林立军著．—长沙：湖南教育出版社，2005

（数学学科专题史丛书）

Ⅰ.简...　Ⅱ.①龚...②林...　Ⅲ.微积分—数学史　Ⅳ.0172－09

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第014360号

简明微积分发展史

龚升　林立军　著

责任编辑：孟实华　邹伟华

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路443号)

网　　址：http://www.hneph.com

电子邮箱：postmaster@hneph.com

湖南省新华书店经销　湖南广播电视大学印刷厂印刷

850×1168　32开　印张：6.125　字数：147000

2005年2月第1版　2005年2月第1次印刷

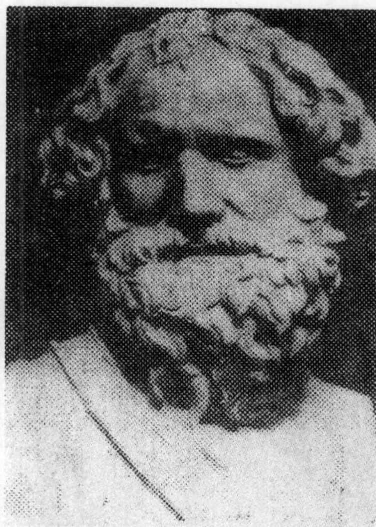
印数：1—1500

ISBN7－5355－4481－9/G·4476

定价：13.50元



图像 1　德谟克利特



图像 2　阿基米德



图像 3　阿基米德之死



图像 4　刘徽



图像 5　祖冲之



图像 6　卡瓦列利



图像 7　沃利斯



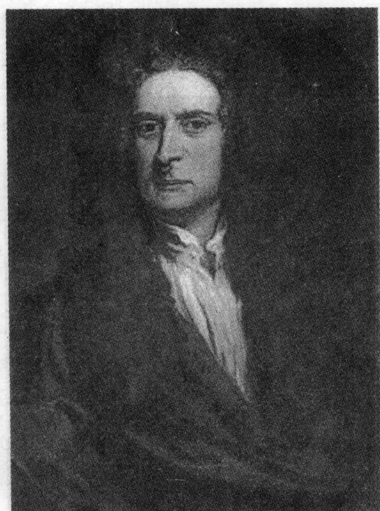
图像 8　费马



图像 9　笛卡儿



图像 10　巴罗



图像 11　牛顿



图像 12　剑桥大学



图像 13　牛顿雕像



图像 14　莱布尼茨



图像 15　泰勒



图像 16　马克劳林



图像 17　雅格布·伯努利



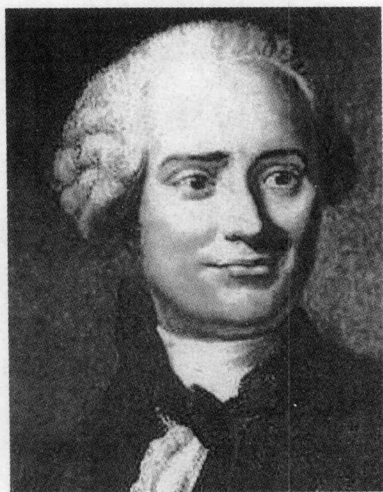
图像 18　约翰·伯努利



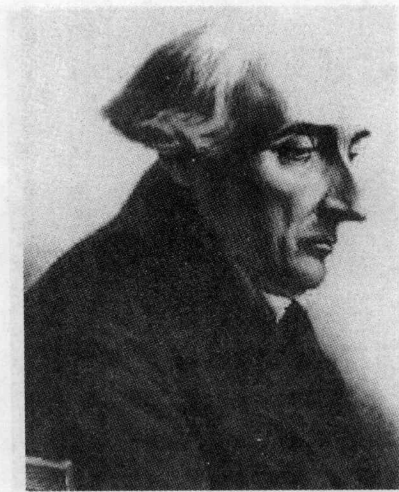
图像 19　欧拉



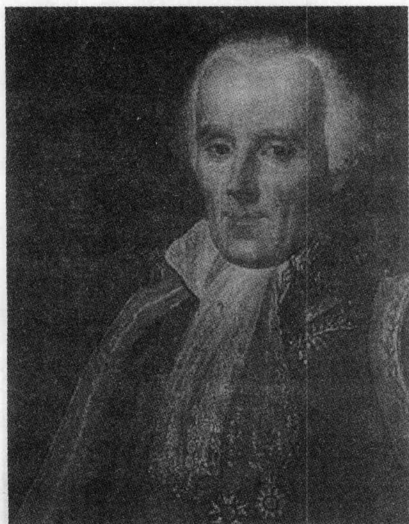
图像 20　克莱罗



图像 21　达朗贝尔



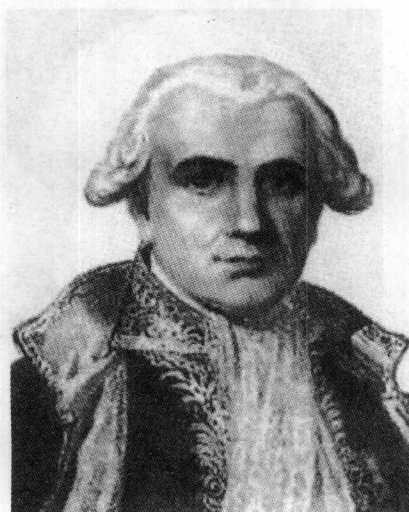
图像 22　拉格朗日



图像 23　拉普拉斯



图像 24　勒让德



图像 25　蒙日



图像 26　傅立叶



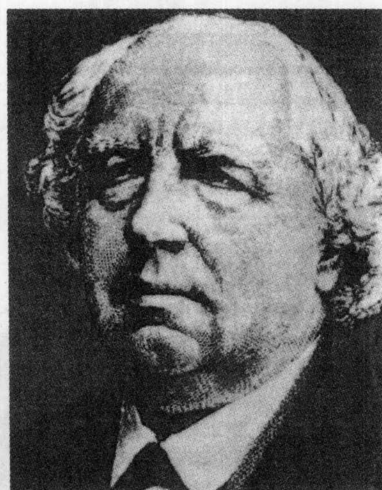
图像 27　波尔查诺



图像 28　柯西



图像 29　黎曼



图像 30　维尔斯特拉斯



图像 31　戴德金



图像 32　康托儿



图像 33　勒贝格



图像 34　希尔伯特



图像 35　庞加莱

序言

数学是人类文化的重要组成部分，数学的历史几乎贯穿了人类的整个文明史.

历史就像一条奔流不息的大河，时而波涛汹涌，时而风平浪静，数学的历史当然也是如此. 微积分的发明可以说是数学发展史上的一次伟大飞跃，对于微积分这门学科来讲，可以十分明确地说，它是以微分与积分这对矛盾为研究对象的学科. 这就决定了微积分的内容是由三部分组成的，即微分、积分以及指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理.

现今，人们清楚地知道微积分的基本定义，应用起来也是得心应手，甚至可能觉得这些定义是如此理所当然. 而对于微积分思想的萌芽、建立与完善却往往不甚关心. 在牛顿和莱布尼茨之前已有众多的先驱者为微积分的产生打下了基础，没有这些前人的工作，牛顿和莱布尼茨的工作就会不可思议. 微积分是微分与积分的合称，事实上，积分思想古已有之，某些问题的提出和解决可以追溯到古希腊时代. 如阿基米德（Archimedes，前287—前212）和欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus，前4世纪）用穷竭法求出了某些特殊图形的面积或体积. 大约成书于公元前1世纪的中国的《九章算术》中有不少求面积与体积的公式，后来刘徽注《九章算术》，对这些公式的论证中也蕴涵了积分与极限的原始想法. 到了16世纪，

德国的开普勒（Johannes Kepler，1571.12.27—1630.11.15）研究了求酒桶体积的问题，而意大利的卡瓦列利（Bonaventura Cavalieri，1598—1647.11.30）依靠他的“不可分量原理”巧妙地求得若干曲边图形的面积及体积公式，还证明了旋转体的体积和表面积公式. 这一理论是古代的穷竭法向牛顿和莱布尼茨现代积分理论的过渡. 微分思想则起源较晚，到17世纪上半叶，法国的笛卡儿（René du perron Descartes，1596.3.31—1650.2.11）、费马（Pierre de Fermat，1601.8.17—1665.1.12）、帕斯卡（Blaise Pascal，1623.6.19—1662.8.19）以及英国的沃利斯（John Wallis，1616.11.23—1703.10.28）、巴罗（Isaac Barrow，1630.10—1677.5.4）等都研究过作切线问题以及极大极小值问题等.

在牛顿与莱布尼茨建立微积分之前，人们甚至已经知道 $y=x^n$（n 为正整数）所表示的曲线的切线及其所围曲边梯形的面积，但所有这些都不能算作微积分的建立. 直到17世纪英国的牛顿（Isaac Newton，1643.1.4—1727.3.31）和德国的莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646.7.1—1716.11.14）明确表述、论证了求积问题与求切线问题之间的互逆关系，证明了微积分基本定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x),$$

即微分与积分互为逆运算，也就是指出微分与积分是一对矛盾，这才建立了微积分这门学科. 牛顿说：“如果我所见的比笛卡儿更远些，那是因为我站在巨人肩上的缘故.” 因此恩格斯说，微积分“是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的”.〔1〕正是由于牛顿和莱布尼茨的功绩，使得微积分成为一门独立学科，而不像以前那样作为几何学的延伸. 也正是由于牛顿和莱布尼茨的功绩，求微分或积分的问题，不再是一个一个问题地来处理，而是

---

〔1〕恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社，1971，P.236.

有了统一的处理方法．这是微积分发展的第一个阶段．

在建立之初，微积分这门学科很不完善，还没有可靠的逻辑基础，这就是为什么恩格斯说“大体上完成”的缘故．尽管如此，牛顿和莱布尼茨建立的微积分在18世纪获得了迅猛发展，特别是欧洲大陆的数学家在微积分的研究和应用方面取得了辉煌成就．在此阶段对微积分的发展作出了杰出贡献的数学家主要有：英国数学家泰勒（Brook Taylor，1685.8.18—1731.12.29）和马克劳林（Colin Maclaurin，1698.2—1746.1.14）等；瑞士的伯努利（Bernoulli）兄弟和欧拉（Léonard Euler，1707.4.15—1783.9.18）以及法国的拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736.1.25—1813.4.10）和达朗贝尔（Jean le Rond D'Alembert，1717.11.17—1783.10.29）等．

在牛顿和莱布尼茨之后，众多数学家经过200多年的共同努力终于给微积分这门学科建立起一个坚固的逻辑基础．代表人物是大家熟知的法国的柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789.8.21—1857.5.23）、德国的维尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815.10.31—1897.2.19）等．这是微积分发展的第二个阶段．微积分的发展还有第三个阶段，那就是由庞加莱（Jules Henri Poincaré，1854.4.29—1912.7.17）与嘉当（Élie Joseph Cartan，1869.4.9—1951.5.6）创立的外微分形式．高维空间的微分与积分是一对矛盾，只能用外微分形式才能说清楚．现在，微积分已显示出强大的威力，在各个数学分支都得到广泛应用，几乎无处不在．

微积分这一学科乃是一种憾人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经进行了2500年之久，它深深地扎根于人类活动的许多领域．了解一下这门学科的发展历程，一方面可以加深对这门学科的理解，另一方面可以知道这一伟大精神财富的积累过程是多么的艰苦卓绝．正如德国数学家外尔（Claud Hugo Hermann Weyl，1885.11.9—1955.12.8）所言：如果不知道追溯古希腊前辈所建立

和发展的概念、方法和结果，我们就不可能理解近50年来数学的目标，也不可能理解它的成就．〔1〕法国数学家庞加莱也认为："如果我们希望预知数学的将来，适当的途径是研究这门学科的历史和现状．"〔2〕

微积分发展的历史是近代数学发展史的一条主线，可写的历史太多太多了，而且人们对微积分发展的历史依然进行着深入的研究，不断有新的发现．写一本包罗万象的微积分史的书，既无可能也无必要，因已经有了许多本写得很精彩的涉及微积分历史的书．

本书只是想用较少的篇幅对微积分发展的各个阶段的历史，尤其是对每个时期的代表人物的学术思想与成就择要述之，以反映出这个时期微积分发展的概貌与水平．对前面提到的微积分发展的第三个阶段（或称后微积分发展阶段）的论述则是本书的重点，也是本书不同于其他已有微积分史之处．

对书中提到的数学家的生卒年月和头像，我们尽量提供，但有的一时无法查到，只好待以后此书重版时再补．

作者向中国科学院数学与系统科学研究院李文林教授致以衷心的感谢，是他建议和支持我们写了这本小册子，并提供了不少宝贵意见，同时感谢他为此书提供诸多图片．

由于作者水平有限，本书内容难免挂一漏万，书中肯定有不少不妥、不足甚至错误之处，希望读者不吝指教．

龚升　林立军

2001年10月于北京中关村

---

〔1〕H. Weyl: A Half Century of Mathematics, American Mathematical Monthly, Vol.58, No.8, P.523.

〔2〕克莱因：《古今数学思想》，上海科学技术出版社（1979）．

目　录

第一章　古代微积分思想的萌芽

§1.1　古希腊的贡献

古希腊数学的成就是辉煌的，它为人类创造了巨大的精神财富，不论从数量还是从质量来衡量，都是了不起的．现代积分思想的雏形可以追溯到古希腊数学．以下列出的若干论点与成果作为举例，从中足以了解古希腊当时的数学水平．

1. 原子论

公元前 5 世纪，古希腊哲学家、数学家德谟克利特(Democritus，约前 460—约前 370）（图像 1）．创立了原子论，认为宇宙万物是由原子构成的．德谟克利特所谓的“原子”是不可再分的，它由无空隙的、坚固的物质组成，原子有大小和形状的不同，但没有本质的区别．他将原子论应用于数学，认为线、面和立体等分别由有限多个原子组成，计算立体的体积就等于将构成该立体的有限多个原子的体积加起来．用此方法他第一个得出圆锥或棱锥的体积是等底等高圆柱或棱柱体积的三分之一的结论．他把圆锥看成由一系列不可再分的薄片组成，分别讨论了这些薄片中相邻两

片相等与不等的情况．德谟克利特的原子论观点是现代积分思想的先声．

2．穷竭法

古希腊数学家、力学家阿基米德（图像 2）生于西西里岛（Sicilia）的叙拉古（Siracusa），卒于同地．早年在当时的文化中心亚历山大跟随欧几里得（Euclid，约前 330—前 275）的学生学习，以后与亚历山大的学者保持密切联系，因此他算是亚历山大学派的成员．后人予以阿基米德高度评价，常把他与牛顿、高斯和欧拉并列为有史以来贡献最大的四位数学家．他的生平没有详细的记载，但关于他的故事却广为为流传．

据说他确立了杠杆定律后，曾发出豪言壮语："给我一个支点，我能移动这个地球！"阿基米德帮助叙拉古王亥厄洛（Hiero）鉴定一顶金制王冠是否掺有白银，当他进入洗澡盆时，水漫出盆外，于是悟得不同质料的物体尽管重量相同但体积不同，根据这一道理可以判断皇冠是否搀假．阿基米德高兴地跳起来，赤身跑回家中，口中高喊："尤里卡！尤里卡！"（希腊语 ευρηκα，意思是"我找到了"．）

在第二次布匿[1]战争时期，罗马大军围攻叙拉古，阿基米德献出自己的聪明才智为祖国效劳．传说他用起重机抓起敌人的船只摔得粉碎；发明奇妙的机器，射出大石、火球．还有书记载他用巨

---

〔1〕古罗马与迦太基（Carthage）争夺地中海西部统治权的战争．迦太基（在今突尼斯）系腓尼基（Phoenicia）人的殖民地（传说建于公元前 814 年），公元前 6—5 世纪已发展成为西地中海强国．公元前 3 世纪初罗马统一意大利，与迦太基形成对峙，卒演成三次大规模战争；因罗马人称腓尼基人为"布匿"（Poeni，据说意为"棕榈之民"），故得名．第一次（前 264—前 241）以罗马的胜利而告终；第二次（前 218—前 201）战争之初罗马接连残败，但最终赢得胜利，迦太基从此丧失其独立和强国地位；第三次（前 149—前 146）战争罗马彻底击败腓尼基人，在迦太基的废墟上建立了"阿非利加省"，并取得西地中海的霸权．

大的凹镜反射日光去焚毁敌舰. 阿基米德竭尽全力给敌人沉重打击. 最后叙拉古因弹尽粮决及叛徒的出卖而陷落，阿基米德不幸死于罗马士兵之手（图像 3）.

阿基米德的数学著作集中探讨了求积问题. 在《圆的度量》(Measurement of a Circle) 中，阿基米德用穷竭法求出了圆的周长和面积公式. 他从圆的内接正三角形开始，边数逐步加倍，计算到正 96 边形时得到圆周率 π 的近似值为 $\frac{22}{7}$. 在《圆的度量》中阿基米德用穷竭法证明了与球的表面积和体积相关的重要结果，比如，任一球的表面积是其大圆面积的 4 倍；球与其外切圆柱的体积之比及表面积之比都是 2:3.

在 20 世纪初，人们幸运地发现了阿基米德写给古希腊数学家埃拉托塞尼（Eratosthenes，约前 276—约前 195）的一封信，这封信极其重要，它记载了阿基米德研究问题的独特思想方法. 后来以《阿基米德方法》(The Method of Archimedes)，简称《方法》为标题发表. 下面举《方法》中的例子说明阿基米德的思想方法. 为方便起见，我们采用现代的符号和术语来推导.

命题 1 抛物弓形的面积是等底等高三角形的 $\frac{4}{3}$.

如图 1.1，设 D 是抛物线弧 ABC 的弦 AC 的中点，过 D 作直线平行抛物线的轴 OY，交抛物线于 B. 求证：抛物弓形 $ABCD$ 的面积为 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{4}{3}$. 当时已经知道，过 B 的切线平行于 AC，即 B

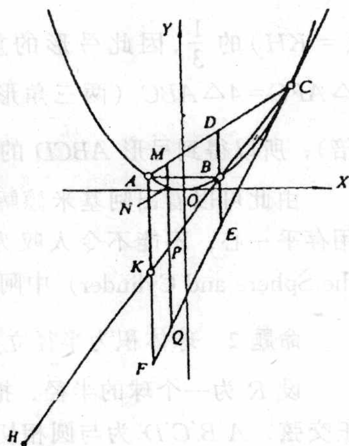


图 1.1

是弓形的顶点.

作 $AF /\!/ OY$，交过 C 点的切线 CF 于 F. 延长 CB 交 AF 于 K，则 K 是 AF 的中点. 取 $KH = KC$，过 AC 上任意点 M 作 $MQ /\!/ OY$，交 CK 于 P，交 CF 于 Q.

由前人或阿基米德已经证明过的结果在这里当作已知条件来使用. 例如，过 D 且平行于轴的直线必过弓形的顶点 B，而且 B 是 ED 中点；$MQ:MN = AC:AM$.

假设各线段都是有重量的，而且重量与长度成正比. 令 HP 是一个以 K 为支点的杠杆. 因为 $MQ:MN = HK:KP$，若将 MN 放在 H 点，就可以与杠杆另一端的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心. 这个关系对于任意的 M 都成立. 弓形可以看作由许多这样的线段所组成，而 $\triangle AFC$ 由许多的 MQ 线段所组成. 如果将所有的 MN（即整个弓形）都放在 H 上（以 H 为重心），就可以与 $\triangle AFC$ 平衡. 弓形的重量可以看作完全集中于 H 点，而 $\triangle AFC$ 的重量可以看作集中在其位于中线 KC 的重心上，而重心与 K 的距离是 KC $(=KH)$ 的 $\frac{1}{3}$，因此弓形的重量是 $\triangle AFC$ 重量即面积的 $\frac{1}{3}$. 又 $\triangle AFC = 4\triangle ABC$（两三角形同底，$AF = 2DE = 4DB$，高也是 4 倍），所以得到弓形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的 $\frac{4}{3}$.

由此可以看出阿基米德解决问题时的技巧多么高超，方法的妙用存乎一心，不能不令人叹为观止. 下面是《论球和圆柱》（On the Sphere and Cylinder）中阿基米德使用平衡法的又一例子.

命题 2　球体积为半径立方与圆周率之积的 $\frac{4}{3}$.

设 R 为一个球的半径，把这个球水平放置，AC 与 BD 为两条正交弦，$A'B'C'D'$ 为与圆相切于 $ABCD$ 的正方形，三角形 AFE 为等腰直角三角形. CA 延长至 G，$AG = 2R$. 沿 AC 旋转得到球、圆柱与圆锥，如图 1.2. 现在从三个主体中割出距 A 为 x 厚度为

Δx 的三个竖直薄片（它们近似于扁平圆柱），下面分别求出这些薄片的近似体积 V.

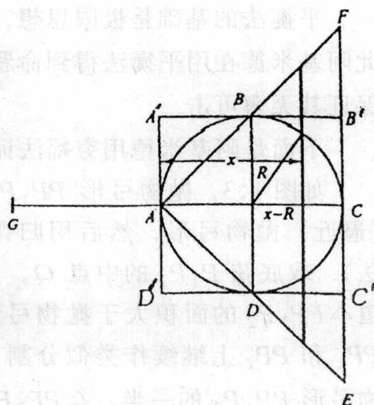


图 1.2

设球片半径为 r，则

$$r^2 = R^2 - (x-R)^2$$
$$= x(2R - x),$$
$$V_{球} = \pi x(2R - x)\Delta x.$$

柱片半径为 R，则

$$V_{圆柱} = \pi R^2 \Delta x,$$

锥片半径为 x，则

$$V_{圆锥} = \pi x^2 \Delta x.$$

从中取出由球和圆锥割出的两个薄片，将其重心挂在 G 点. 这两个薄片绕支点的合力矩为

$$[\pi x(2R - x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x]\cdot 2R = 4\pi R^2 x\Delta x.$$

可以看出，这等于圆柱割出的薄片处于原来位置时绕 A 点的力矩的 4 倍. 把所有这些薄片绕 A 的力矩加起来得

$$2R(V_{球} + V_{圆锥}) = 4RV_{圆柱},$$

$$2R\left(V_{球} + \frac{8\pi R^3}{3}\right) = 8\pi R^4,$$

则 $$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

由这些例子可以看出，阿基米德的“平衡法”的中心思想就是，要计算一个未知量（图形的体积或面积），先将它分成许多微小的量（如面分成线段，体积分成薄片等），再用另一组微小单元来进行比较. 但通常是建立一个杠杆，找一个合适的支点，使前后两组微小的量获得平衡，而后者的总和比较容易计算. 这实际上就是近代积分的基本思想. 阿基米德的睿智在 2200 多年前就放射出耀眼的光芒，因此他可以当之无愧地被称为“积分学的先驱”.

平衡法的基础是极限思想，但当时还没有严密的极限理论，因此阿基米德在用平衡法得到命题后，有必要用穷竭法加以证明，以保证其无懈可击.

下面是阿基米德用穷竭法证明上面的命题1.

如图1.3，抛物弓形 PP_1P_2，阿基米德首先用三角形去穷竭（逼近）抛物弓形，然后用归谬法证明之（所谓归谬就是双假设法）. 取底弦 P_1P_2 的中点 Q，直线 PQ 平行于抛物线轴. 容易知道 $\triangle PP_1P_2$ 的面积大于抛物弓形 PP_1P_2 的面积的一半[1]. 在弦 PP_1 和 PP_2 上继续作类似分割，同理有：$\triangle PP_1P_3$ 的面积大于抛物弓形 PP_1P_3 的一半，$\triangle PP_2P_4$ 的面积大于抛物弓形 PP_2P_4 的一半. 阿基米德利用已知的命题证明了

$$\triangle PP_1P_3+\triangle PP_2P_4=\frac{1}{4}\triangle PP_1P_2.$$

称 $\triangle PP_1P_2$ 为第1级三角形，面积记为 $\triangle_1$，称 $\triangle PP_1P_3$ 和 $\triangle PP_2P_4$ 为第2级三角形，其面积之和记为 $\triangle_2$，$\triangle_2=\frac{1}{4}\triangle_1$，继续在 P_1P_3、P_3P、PP_4 和 P_4P_2 上作出4个第3级三角形，其面积之和是 $\triangle_3$，同理

$$\triangle_3=\frac{1}{4}\triangle_2=\frac{1}{4^2}\triangle_1.$$

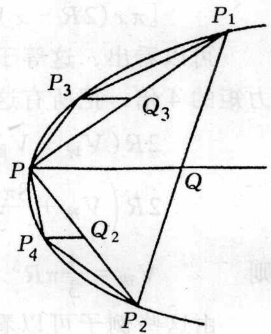


图 1.3

继续下去一直作到第 n 级三角形，因其后的三角形也有同样的面积关系，因此，$\triangle_n=\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1$. 这样抛物弓形 PP_1P_2 的面

---

[1] 证明如下：过 P 作 P_1P_2 的平行线 MN，过 P_1 和 P_2 作 PQ 的平行线与 MN 分别交于 MN. 显然平行四边形 P_1P_2NM 面积大于抛物弓形 PP_1P_2 的面积，并且是 $\triangle PP_1P_2$ 面积的2倍，四边形 P_1P_2NM 面积的一半大于抛物弓形 PP_1P_2 面积的一半，即 $\triangle PP_1P_2$ 面积大于抛物弓形 PP_1P_2 面积的一半.

积可以由这些内接三角形添满，即所谓的"穷竭". 抛物弓形 PP_1P_2 的面积可以由几何级数

$$\triangle_1+\frac{1}{4}\triangle_1+\frac{1}{4^2}\triangle_1+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1$$

来逼近. 考察此级数的前 n 项和

$$\begin{aligned}S_n&=\triangle_1+\frac{1}{4}\triangle_1+\frac{1}{4^2}\triangle_1+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1\\&=\triangle_1\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\&=\triangle_1\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}\\&=\triangle_1\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\&=\frac{4}{3}\triangle_1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1\\&=\frac{4}{3}\triangle_1-\frac{1}{3}\triangle_n.\end{aligned}$$

由此可以看出，$S_n<\frac{4}{3}\triangle_1$，又 $\frac{1}{3}\triangle_n=\frac{4}{3}\triangle_1-S_n$.

然后阿基米德用他的归谬法证明抛物弓形的面积 $S=\frac{4}{3}\triangle_1$，假设等式不成立，则必有两种情况：

1. 若 $S>\frac{4}{3}\triangle_1$，则只要 n 足够大，就可使

$$S-S_n<S-\frac{4}{3}\triangle_1,$$

即 $S_n>\frac{4}{3}\triangle_1$，这显然与前面的不等式矛盾.

2. 若 $S<\frac{4}{3}\triangle_1$，则只要 n 足够大，就可使

$$\frac{1}{3}\triangle_n=\frac{4}{3}\triangle_1-S_n<\frac{4}{3}\triangle_1-S,$$

即 $S_n > S$，这也是不可能的，因为事实上 $S_n < S$. 综上所述 $S = \frac{4}{3}\triangle_1$.

阿基米德用穷竭法在《劈锥曲面与回转椭圆体》中研究了椭圆的表面积以及回转抛物体（抛物线绕轴旋转产生的立体）被平面所截取的部分的体积. 证明的方法是穷竭法，已初具现代积分思想之雏形.

在文章的开头先给出两个引理，以备后面证明之用. 第 1 个是等差数列求和公式，写成不等式

$$2(a+2a+3a+\cdots+na) > n^2a > 2[a+2a+3a+\cdots+(n-1)a],$$

用求和公式得

$$n(n+1)a > n^2a > (n-1)na,$$

不等式显然成立. 第 2 个是自然数平方和公式，首先证明

$$(n+1)(na)^2 + a(a+2a+3a+\cdots+na) = 3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2].$$

由此得知

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2 = S_na^2.$$

写成不等式为 $3S_{n-1}a^2 < n^3a^2 < 3S_na^2$. 下面以一简单命题的证明来阐明阿基米德的思想. 为便于理解，改用现代符号表示.

命题 3 回转抛物体被垂直于轴的平面所截取的部分的体积等于同底等高的圆锥体的 $\frac{3}{2}$.

抛物线 AOB（不妨设其为 $y=x^2$），绕其轴 OC 旋转，产生旋转抛物体. 求被垂直于 OC 的平面 ACB 所截取的部分为 V. 将线段 OC 分成 n 等份，分点分别为 $O=C_0$，C_1，C_2，…，C_{n-1}，$C_n=C$. 过这些分点分别作与 OC 垂直的平面将旋转抛物体分成 n 个

薄片，每个薄片介于一个内接与外接圆柱之间，如图 1.4.

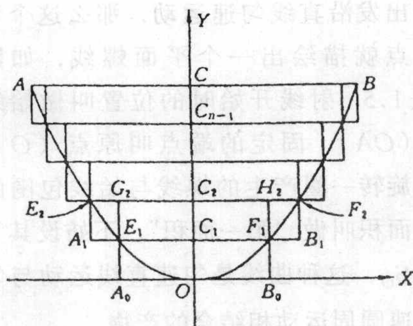


图 1.4

设 $OC=h$，则小薄片的厚度 $d=\frac{h}{n}$，各层外接圆柱的底面半径记为 x_1，x_2，…，x_n，则 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，…，$y_n=x_n^2$ 分别是 C_1，C_2，…，C_n 到点 O 的距离. 设外接圆柱体积的总和是 V_n，内接圆柱体积的总和是 V_n'，则有

$$
\begin{aligned}
V_n &= d\pi x_1^2 + d\pi x_2^2 + \cdots + d\pi x_n^2 \\
&= d\pi(y_1+y_2+\cdots+y_n) \\
&= d\pi(d+2d+\cdots+nd) > d\pi\cdot\frac{n^2}{2}d = \frac{\pi}{2}h^2 \\
&= V' > d\pi[d+2d+3d+\cdots+(n-1)d] = V_n'.
\end{aligned}
$$

此不等式是由前面的引理推出. 现证明 $V=V'$，如果 $V>V'$，则因外接圆柱的总和与内接圆柱的总和只差一个小圆柱 $\pi nd^2=\frac{\pi h^2}{n}$，只要 n 足够大，它可任意小，即可使

$$V-V' > V_n - V_n'$$

这是不合理的，因为 $V_n>V$ 而 $V_n'<V'$. 同理 $V<V'$ 也得矛盾，所以 $V=V'=\frac{\pi}{2}h^2=\frac{1}{2}\pi r^2 h$，$r=x_n$ 为底半径 CB. 而同底等高圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi r^2 h$，故 V 是其体积的$\frac{3}{2}$.

阿基米德在《论螺线》中定义了后来以其名字命名的螺线：如果在平面上一条射线绕它的固定端点匀速旋转，同时有一点从端点

出发沿直线匀速运动，那么这个动点就描绘出一个平面螺线，如图1.5. 射线开始时的位置叫做始线（OA），固定的端点叫原点（O），旋转一圈产生的螺线与始线包围的面积叫做“第一面积”，不妨设其为S_O. 这种曲线是匀速直线运动与匀速圆周运动相结合的产物.

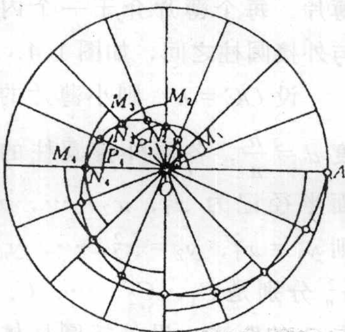


图 1.5

可以用现代的极坐标来描述这条曲线：设 ω（以弧度为单位）是直线运动时的角速度，v 是该点沿直线运动时的速度. 则 t 时刻动点的极坐标为

$$r = vt, \quad \theta = \omega t,$$

因此，阿基米德螺线的极坐标方程为

$$r = a\theta, \text{其中 } a = \frac{v}{\omega}.$$

始线旋转一周动点到达 A 点，$OA = 2\pi a$，以 OA 为半径的圆叫做“第一圆”，不妨设其为$S_{O'}$. 阿基米德用穷竭法证明了以下的

命题 4 “第一面积”等于“第一圆”面积的$\frac{1}{3}$，即

$$S_O = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

为了证明这个命题，阿基米德在给出螺线的定义之前，证明了作为引理的自然数平方和的不等式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

将圆等分成 n 个扇形（如图 1.5），扇形的边即圆的半径与螺线相交于 O，A_1，A_2，…，A_n. 如果记 $OA_1 = r$，则有

$$OA_1 = r, \quad OA_2 = 2r, \quad \cdots, \quad OA_n = nr.$$

显然，区域 S 包含着由半径为

$$0,\ r,\ \cdots,\ (n-1)\ r$$

的一族（内接）扇形组成的区域 M，同时又被由半径为

$$r,\ 2r,\ \cdots,\ nr$$

的一族（外接）扇形组成的区域 N 所包含. 因此

$$S_N - S_M = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$-\frac{4a^2\pi^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$ [1]

$$= \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot n^2.$$

而 $\frac{4a^2\pi^3}{n} = \frac{S_{O'}}{n}$，即一个扇形的面积，当 n 足够大时，这个面积会任意小. 用此前多次用过的反证法，可以证明 $S_O = \frac{1}{3}S_{O'}$.

假设 $S_O < \frac{1}{3}S_{O'}$，当选取的 n 足够大时，能使得

$$S_N - S_M < \frac{1}{3}S_{O'} - S_O,$$

因为 $S_M < S_O$，所以 $S_N < \frac{1}{3}S_{O'}$. 但是

$$\frac{S_N}{S_{O'}} = \frac{r^2 + (2r)^2 + \cdots + (nr)^2}{n(nr)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

(利用前面的引理)，显然 $S_O < \frac{1}{3}S_{O'}$ 是错误的. 假设 $S_O > \frac{1}{3}S_{O'}$，当选取的 n 足够大时，能使得

$$S_N - S_M < S_O - \frac{1}{3}S_{O'},$$

因为 $S_N > S_O$，所以 $S_M > \frac{1}{3}S_{O'}$. 但是

---

[1] 扇形面积公式为 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$.

$$\frac{S_M}{S_{O'}}=\frac{r^2+(2r)^2+\cdots+[(n-1)r]^2}{n(nr)^2}$$

$$=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}<\frac{1}{3}$$

(还是利用前面的引理). 这个矛盾说明 $S_O>\frac{1}{3}S_{O'}$ 是不可能的. 综上所述只能 $S_O=\frac{1}{3}S_{O'}=\frac{4}{3}\pi^3a^2$.

此后, 阿基米德还计算了螺线扇形 S 的面积. 如果螺线上始点和终点的向径分别为 r_1 和 r_2, S 的中心角是 θ (弧度制), 则

$$S=\frac{\theta}{2}\left[r_1r_2+\frac{1}{3}(r_2-r_1)^2\right].$$

尽管这个公式本身并不重要, 但却表现了阿基米德驾驭数学的高超技巧, 这里不再赘述.

在阿基米德用穷竭法证明命题时常用到"括约法", 所谓的"括约法"就是: 为了证明一个几何量 S, 根据所考虑的图形的几何性质, 构造两个数列 $\{U_n\}$ 和 $\{V_n\}$, 使得对于任意的 n 都有

$$U_n<S<V_n \text{ 和 } U_n<T<V_n.$$

在括约法的"差的形式"中, 要证明的是: 当给定的 $\varepsilon>0$, 对于足够大的 n 使

$$V_n-U_n<\varepsilon.$$

在括约法的"比的形式"中, 要证明的是: 当给定 $\alpha>1$ 时, 对于足够大的 n, 有 $\frac{V_n}{U_n}<\alpha$, 最后用双假设法来证明 $S=T$.

阿基米德的穷竭法除了没有取极限这一步外与现代积分的思想是基本一致的, 穷竭法的目的是想用一种严格的处理方法来代替取数列的极限. 尽管阿基米德也曾研究过螺线的切线问题, 但在他博大精深的数学思想中, 没有发现微分思想的痕迹. 阿基米德在物理等其他学科也做出了了不起的成就, 比如浮力定律、杠杆原理等.

3. 欧多克索斯的贡献

虽然我们看到阿基米德能够随心所欲地运用穷竭法，但穷竭法并不是他的独立创造，在此必须提到另外两位数学家——安蒂丰(Antiphon，前 480（?）—前 411）和欧多克索斯. 安蒂丰是智人学派[1]（Sophist School）的代表人物，是他提出了求圆面积的“穷竭法”. 欧多克索斯是古希腊最杰出的学者之一，就数学来说地位仅次于阿基米德. 在阿基米德之前 100 多年就已经使用和完善了穷竭法，因此被尊为微积分学的先驱. 用连续不断的细分，去求一个未知几何量的大小，其中必然会碰到无理数、无穷小和极限等有关问题，限于当时的数学水平，要处理好这些问题是不容易的，但欧多克索斯应用穷竭法确实相当成功. 例如，他因此证明了两圆面积之比等于其半径平方之比，两球体积之比等于其半径立方之比，棱椎与圆锥的体积分别是同底等高的棱柱和圆柱体积的$\frac{1}{3}$，等等.

§1.2 古代中国的贡献

以中国为代表的东方数学也闪耀着熠熠光辉与古希腊数学交相辉映. 在古代中国的数学中也能够找到积分思想的萌芽.

---

[1] 公元前 480 年以后，雅典成为希腊的政治文化中心. 智人学派是这里的第一个学派，学派中的各方面学者崇尚公开讨论或辩论的精神. 这个学派的主要研究目标之一是用数学解释宇宙现象. 在数学方面，他们提出几何作图的尺规限制，即只能用有任意开度的圆规和无刻度的无限长直尺，由此产生了著名的三大几何作图问题：**化圆为方问题、倍立方问题、三等分角问题**.

1. 刘徽的“割圆术”

中国古代的“割圆术”与古希腊的穷竭法有着异曲同工之妙. 数学家刘徽（公元 3 世纪）在公元 263 年撰《九章算术注》. 在《九章算术注》中包含了刘徽的许多独立创造，这些创造使刘徽在中国数学史上流芳百世.

刘徽（图像 4）是中国古代卓越的数学家，他的生平没有可靠记载. 唐代李淳风（602—670）在《隋书·律历制》中记载：“魏陈留王景元四年（公元263 年），刘徽注九章…”.《九章算术》是中国古代流传下来的较早也是最重要的数学著作，它不是出自于某一个人的手笔，亦非一个年代的作品. 它是经过了历代各家的修订和增补才逐渐形成的. 刘徽为其作注，加上自己的心得，使其便于理解，因而流传下来. 刘徽注文的内容非常丰富，有很多独到见解，从中可以看到刘徽本人对数学的理论造诣很深. 他不但纠正了原书流传下来的一些错误，而且给出正确的解法. 刘徽可以说是中国古代数学理论的奠基人.

在刘徽之前，有人曾以内接正 12 边形面积取代圆的面积，以圆的正 6 边形周长作为圆的周长. 而刘徽在《九章算术》方田章“圆田术”注中创造性地提出以割圆术作为求圆的周长、面积与圆周率的基础. 割圆术的基本思想是用圆的内接正多边形去逐步逼近圆. 刘徽从圆的内接正 6 边形开始割圆，然后把边数逐次加倍同时计算内接正多边形的周长和面积，割得越细，其内接正 $6\cdot 2^n$ ($n=1,2,3,\cdots$)边形的面积 S_n 与圆的面积 S 之差 $S-S_n$ 就越小. 割之又割，割到不可再割的地步，则圆内接正多边形就与圆周合为一体，其面积不再小于圆的面积. 用刘徽的话说就是“割之弥细，所失弥

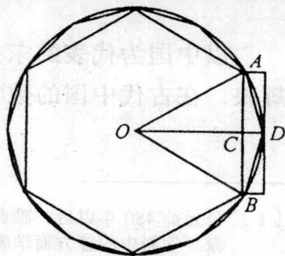


图 1.6

少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣.”

如图1.6，设圆面积为S，半径为r，圆的内接正$6\cdot 2^n$边形的边长、周长和面积分别为l_n，L_n，S_n. 边数加倍后，得到圆的内接正$6\cdot 2^{n+1}$边形，其边长、周长和面积分别为l_{n+1}，L_{n+1}，S_{n+1}.

刘徽知道，当l_n已知，可以用勾股定理求出l_{n+1}. 令$AB=l_n$，则$BD=l_{n+1}$.

$$l_{n+1}=BD=\sqrt{BC^2+CD^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right]^2}.$$

此时

$$L_{n+1}=2n\sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right]^2},$$

$$S_{n+1}=n\left(\frac{1}{2}AB\cdot OD\right)=n\cdot\frac{l_n r}{2}=\frac{L_n r}{2}.$$

刘徽指出，圆内接正n边形的每边与圆周之间有一个余径r_n，若将诸边长乘以余径（在底边上作高为CD的矩形）加到S_n上去，则其和大于圆的面积，即

$$S_n+6\cdot 2^n l_n r_n>S>S_n,$$

其中

$$r_n=r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2},$$

即

$$S_n+2(S_{n+1}-S_n)>S>S_n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)]=S.$$

可以看出，圆面积 S 是其下限数列 $\{S_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 和上限数列 $\{S_n+2(S_{n+1}-S_n)\}(n=1,2,3,\cdots)$ 的极限. 用这种方法，不必计算圆的外接正多边形就能推出圆周率的上下限.

刘徽从圆的内接正六边形开始，一直计算到 192 边形，得到的圆周率精确到小数点后两位的近似值 $\pi\approx3.14$，化成分数为 $\frac{157}{50}$，即著名的“徽率”. 刘徽一再说明“此率尚微少”，但根据需要可以继续这个程序得到更精确的值. 从刘徽的割圆术可以看出，刘徽不仅明确地多次使用了极限思想（这与现代数学严格意义上的极限还有很大差距），而且采取了对直线进行无穷小分割，然后求其极限状态的和的方式解决圆面积问题的方法. 这说明刘徽已经产生了积分思想的萌芽. 古希腊的穷竭法与古代中国的割圆术极为相似，有所不同的是，割圆术有明确的极限过程而穷竭法没有. 刘徽是中国算术史上第一个建立可靠的理论来推算圆周率的数学家.

刘徽不仅在割圆术而且在求体积理论中体现了积分思想. 他在证明《九章算术》中的立体体积公式时，灵活地使用了极限方法和不可分量方法. 下面以证明球体积公式为例，来考查刘徽是如何使用不可分量方法的.

刘徽首先指出《九章算术》中的球体积公式是错误的，并在《九章算术》注中指出了一正确方法. 刘徽创造了一个新的立体图形，他称之为“牟合方盖”，并指出，一旦计算出牟合方盖的体积，球的体积就会迎刃而解.

在一立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，这两个圆柱的公共部分就是所谓的牟合方盖，如图 1.7. 牟合方盖恰好把立方体的内切球包含在内，并且与其相切. 如果用同一个水平面去截它们，就得到一个圆（球的截面）和它的外切正方形（牟合方盖的截面）. 刘徽指出，在每一个高度上的水平截面圆与其外切正方形的面积之

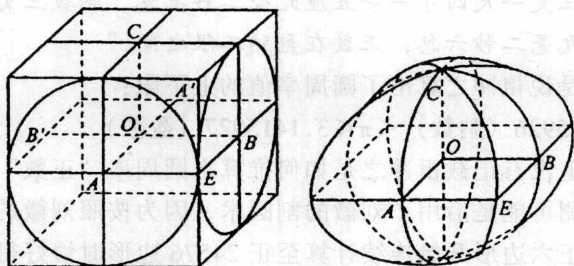


图1.7

比都为 $\pi:4$，因此球体积与牟合方盖的体积之比也应该是 $\pi:4$．实际上，刘徽在这里已经得到了西方的“卡瓦列利原理”，遗憾的是他没能把它总结为一般形式．牟合方盖问题一直迷惑着刘徽．最后刘徽也不得不说：“敢不阙疑，以俟能言者！”虽然刘徽未能求出牟合方盖的体积，但他创立的特殊形式的不可分量方法却为后人解决求球的体积问题指明了方向．

2．祖氏父子的贡献

在公元200多年，刘徽所希望的“能言者”终于出现了，他（们）就是祖冲之（429—500）与祖暅父子，祖冲之（图像5）因其对圆周率的精确计算而著名．祖冲之是范阳遒〔1〕人，生在中国十分动乱的南北朝时代，由于家中几代人都研究历法，所以他从小就有机会接触家传的科学知识．祖冲之的杰出成就，主要在天文历法、机械和数学三方面．他曾破天荒地将“岁差”引入历法中．祖冲之生前未能如愿地使自己制定的《大明历》得以施行，510年，在其子祖暅的竭力推荐下《大明历》终获施行．

《隋书·律历志》记载：“祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，

〔1〕今河北中部．

圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间.”

这就是说祖冲之算出了圆周率值的上下限：

3.1415926（朒数）$<\pi<$3.1415927（盈数）

史料上没有记载祖冲之是如何推算出圆周率“正数”的上下限的，据推测可能是沿用了刘徽的割圆术，因为按照刘徽的方法，从圆的内接正六边形开始连续计算至正24576边形时恰好得到这个结果.《隋书·律历志》还记载了祖冲之的有关圆周率的另一重要结果：“密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五；约率：圆径七，周二十二.”可以看出祖冲之还得到了圆周率分数形式的近似值.即密率 $\pi=\frac{355}{113}$，约率 $\pi=\frac{22}{7}$. 约率早已被阿基米德所知，但密率却是一项史无前例的创举. 密率$\frac{355}{113}$是一个有趣的数字，分子分母恰好是三个最小的奇数的重复，便于记忆. $\frac{355}{113}=3.141592920\cdots$，相对误差是$\frac{9}{10^8}$. 设圆径10公里，用密率计算得到的圆周只比真值大不到3毫米. 容易证明，比密率更接近π的分数都比密率复杂得多. 其中最简单的一个是$\frac{52163}{16604}$. 换言之，在分母小于16604的分数中，没有比$\frac{355}{113}$更接近π的分数. 因此为纪念祖冲之的首创之功，“密率”又被称为“祖率”. 圆周率的发展，在某种程度上反映着一个时代或一个民族的数学水平.

曾经困扰刘徽的球体积问题到祖冲之时代终于获得了突破. 这个正确结果记载在《九章算术》“开立圆术”之李淳风注中，称为“祖暅之开立圆术”. 祖暅是祖冲之的儿子，也有许多数学贡献.

祖暅对球体积的推导也遵循了刘徽的方法，仍从计算牟合方盖体积开始. 祖暅的具体做法是，先取牟合方盖的八分之一，考虑它

与它的外切正方体围成的立体，如图 1.8 那样把它分成三个小立体．牟合方盖的八分之一部分称为“内棋”，三个小立体称为“外棋”．祖暅的贡献在于他用截面原理证明了命题 A：三外棋体积之和等于一个长宽高皆为立方体边长的阳马的体积，即以外切正方体上底面为底，以正方体一边为垂直边的倒方锥的体积．

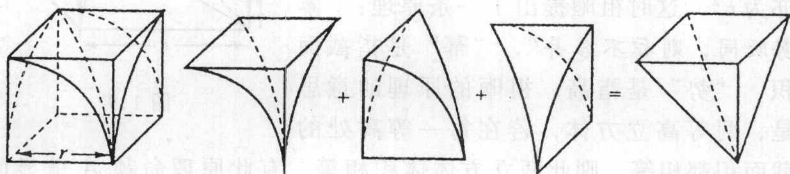


图 1.8

令立方体的边长为 r，则 $V_{倒方锥}=\frac{r^3}{3}$，则内棋的体积为立方体的体积减去倒方锥的体积，即

$$r^3-\frac{r^3}{3}=\frac{2r^3}{3}.$$

又牟合方盖为八个内棋，故

$$V_{牟合方盖}=8\times\frac{2r^3}{3}=\frac{16r^3}{3}.$$

又根据刘徽得出的结论：

$$V_{球}:V_{牟合方盖}=\pi:4$$

由此可得

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟合方盖}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

问题的关键是看祖暅如何证明三个外棋体积之和等于以外切正方体上底面为底，以正方体一边为垂直边的倒方锥的体积．

如图 1.9，考察立方体在高 h 处的水平截面，显然三个外棋的截面积是立方体截面积与内棋的截面积之差，

$$S_{ASQP}+S_{CTQR}+S_{BSQT}=S_{ABCD}-S_{PQRD}.$$

设 $AS=PQ=x$，则有

$$S_{ABCD}-S_{PQRD}=r^2-x^2,$$

根据勾股定理 $r^2-x^2=h^2$，所以

$$S_{ASQP}+S_{CTQR}+S_{BSQT}=h^2.$$

再考虑倒方锥，它在高为 h 处的截面积亦为 h^2. 这时祖暅提出了一条原理："幂势既同，则积不容异"，"幂"是指截面积，"势"是指高. 祖暅的原理的意思是，两等高立方体，若在每一等高处的截面积都相等，则此两立方体体积相等. 有此原理命题 A 就显而易见了.

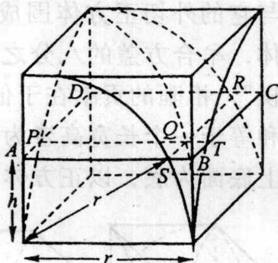


图 1.9

这个原理后世称为"祖氏原理"，事实上刘徽已经使用过这个原理，只是未能明确地提出来. 得到球体积的基础是"出入相补"原理和祖氏原理. 在推导球体积问题上，刘徽与祖暅各完成了任务的一半，刘徽确定了"牟合方盖"之形，指明了努力的方向，而祖暅算出了"牟合方盖"的体积. 一个是奠基性的工作，一个是总结性的成果，两人平分秋色各有千秋.

之所以称这条原理为"祖氏原理"而非"祖暅原理"是因为不能把这个成果归功于祖暅一个人. 正如祖冲之在《驳议》中说，他在任南徐州从事史时已经撰正"立圆旧术"，就是说得到了正确的球体积公式. 很有可能是祖冲之把这个结果写进了《缀术》（已失传），祖暅将其继承和完善. 祖暅原理在西方称为"卡瓦列利原理"，是由意大利数学家卡瓦列利在 1635 独立提出. 这个原理对微积分的建立产生了重大影响.

§1.3 古代东西方朴素的极限思想

极限是贯穿微积分学的主线，有关极限的例子多次在各个时代和地区出现过. 例如中国战国时代《庄子·天下篇》中记载：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”常被当作以零为极限的例子. 前文所述的刘徽在《九章算术》注中有关割圆术的描述“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆同体，而无所失矣”也是明显以零为极限的. 但是这些都不是严格的极限概念，只是提出了求极限的一种思想. 在极限思想方面走得最远的是古希腊数学家.

比如前文所说的安蒂丰提出的“穷竭法”，从某一圆内接正多边形开始逐步加倍，得到新的圆内接正多边形，再将其加倍，这样不断的做下去，圆必将被穷竭. 穷竭法是近代极限理论的雏形.

在与极限有关的众多例子中，芝诺悖论是最具代表性的. 芝诺（Zeno of Elea，约前 490—约前 430）提出了 40 个悖论，其中与运动有关的 4 个最著名.[1]

关于一个量（时间、空间、长度等）是否无限可分，有两种完全对立的观点：第一种认为可以无限分割；另一种认为分到一定程度就不能再分，即一个量是由不能再分的基本单元构成. 如线段是由点构成的，而点是不能再分的.

针对第一种观点（无限可分），芝诺提出两个悖论：

(1) 二分说（dichotomy）：一个物体从 A 地到 B 地，永远不

〔1〕原文见 I. Thomas, Selections Illustrating the History of Greek Mathematics Harvard University Press（1957）vol I, P. 366.

能到达. 因为欲从 A 到 B，必先通过道路的二分之一；但要通过二分之一必先通过二分之一的二分之一，即全程的四分之一；欲通过四分之一必先通过八分之一，这样分下去，永无止境. 由此芝诺得出结论，此物根本不能运动，因为他被道路的无限分割阻碍着.

(2) 阿基里斯追龟说：阿基里斯（Achilles）是荷马（Homer，古希腊诗人）史诗《伊利亚特》（Iliad，描写 Troy 的战争的叙事诗）中的英雄，以擅跑闻名. 芝诺说阿基里斯追龟永远追不上. 比如，阿基里斯的速度是龟的十倍，龟在前面 100 码. 当阿基里斯跑到龟的出发点时，龟已前进 10 码；阿基里斯再追 10 码，龟又前进了 1 码；再追 1 码，龟又前进了 $\frac{1}{10}$码，这样永远隔着一段距离，总也追不上.

针对第二种观点（不能无限分割），芝诺提出两个悖论.

(3) 飞矢不动说：如果时间分割到最后，得到不可再分的单元，那么在这个单元内，飞矢只能占据一个特定的位置，因此它是不动的. 否则若占据两个不同的位置，则可将时间单元再分割成前后两段，这与原先的假设不符，于是所谓运动无非是许多静止的总和.

(4) 运动场（stadium）问题：一段时间与其一半相等

A · · · · 　　　　A · · · · ·

B · · · · 　　　　B 　　　· · · ·

C · · · · 　　　　C 　　· · · ·

设有三队士兵 A、B 和 C，开始时首尾对齐，设在最小的时间单元里，A 队向左移动一位，B 队向右移动一位. 相对于 B 而言，A 移动了两位. 于是使 A 相对于 B 移动一位的时间应该是时间单元的一半. 假定时间单元不能再分，那么它的一半就等于它本身.

芝诺的这些悖论是亚里士多德作为批判的对象记录下来的，芝诺提出这些悖论的目的是什么不得而知. 毕竟，他把数学中的重大问题以悖论的形式揭露出来，迫使人们去思考，对数学的发展起到

了毋庸置疑的影响．除了上述四个悖论之外，芝诺还提出很多发人深省的问题．比如他坚持物质的一般性，认为“多”（many）是不存在的[1]．他说，假如“多”存在，那就可以无限分割下去，越分越细，只要还有大小就可再分，一直分到没有大小为止．现在再将这些没有大小的单元积累起来，不管加多少，仍然没有大小，因此物质变成“一无所有”．如果不管怎样分，最后的单元还有大小，那么将无穷个有大小的东西积累起来，物质就变成无穷大．于是物质既是“一无所有”又是无穷大．

如果从芝诺时代算起，极限问题困扰了数学家们2000多年．即使到了微积分创立的时候，极限仍旧是一个棘手的难题，直到19世纪微积分严格化之后芝诺悖论才获得了圆满解决．

---

〔1〕 T. Heath, A History of Greek Mathematics, Oxford at the Clarendon Press (1921) vol. I, P. 275.

第二章　酝酿时期

欧洲在渡过了漫长的中世纪之后终于迎来了文艺复兴的伟大时期，同时掀开了科学发展的崭新一页．一方面，人们被压抑了近千年的创造力仿佛像洪水一般突然之间爆发出来，自然科学蓬勃发展，大量科研成果纷纷涌现．另一方面，由于资本主义社会的产生与发展，遇到的史无前例的实际问题令科学家们感到困惑，发明新的行之有效的数学工具成为必须．

尽管积分思想曾延续了2000多年，但微分思想的产生却是17世纪以后的事．近代微积分的酝酿主要是17世纪前半叶的事．微积分之所以产生在这个时代有着深刻的时代背景，可以说需要是创造的永恒动力．刺激微积分产生的主要科学问题是：

1．面积、体积、曲线长、重心和引力计算；

2．瞬时变化率问题；

3．切线问题；

4．函数的极大值、极小值问题．

§2.1 关于积分

文艺复兴之后，古希腊的大量著作被源源不断地翻译成欧洲多种文字，其中就包括大量阿基米德的著作，古希腊的著作重新引起了数学家对积分问题的兴趣. 从17世纪开始，积分问题开始进入了一个新时期，并取得了一系列重要成果.

1. 开普勒的旋转体的体积

1619年，德国数学家、天文学家开普勒公布了他的最后一条行星运动定律. 开普勒行星运动三大定律是：

1. 行星运行的轨迹是椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点；

2. 太阳到行星的矢径在相等的时间扫过的面积相等；

3. 行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的长半轴的立方成正比.

这三个定律是开普勒由观测到的数据归纳出来的，用数学方法证明它们成为当时自然科学中心课题之一. 后来，牛顿根据万有引力平方反比定律给出了证明.

1615年，为了使酒商能够精确地估算他们的酒桶的体积，开普勒出版了《测定酒桶体积的新立体几何》（Nova stereometria doliorum vinariorum）一书. 书中引入了无穷大和无穷小概念，指出“圆是由无数个顶点在圆心的三角形构成，圆周是由这些三角形的无穷小底边构成”，他用同样道理阐明圆锥的棱锥构成学说，扩展了阿基米德的穷竭法. 他主要研究了各种旋转体的性质，把无限小的弧看成直线，把无限窄的面看成直线，把无限薄的体看作面. 例如，开普勒考虑过下面的问题：

半径为 r 的圆围绕其所在平面上与圆心距离为 R 的垂直轴旋转形成一个圆环体. 证明这个圆环体的体积等于这个圆的面积与圆心经过的路程之积（帕波斯（Pappus of Alexandria，约 300—约 350，希腊数学家）定理又称为古尔丁（Paul Guldin，1577.6.12—1643.11.3，瑞士数学家）定理），即

$$V=(\pi r^2)(2\pi R)=2\pi^2 r^2 R.$$

在推导这个公式时，开普勒用通过旋转轴的平面把圆环体分成无数多个垂直的薄圆片，薄圆片内侧较薄外侧较厚，如图 2.1. 开普勒假设这种薄圆片的体积是 $\pi r^2 l$，其中 $l=\frac{l_1+l_2}{2}$，即薄圆片的最小厚度与最大厚度之平均值，也可以看作圆经过的一段路程. 因此 l 是薄圆片在圆心处的厚度，于是

$$V=\sum \pi r^2 l=\pi r^2 \sum l=(\pi r^2)(2\pi R)=2\pi^2 r^2 R.$$

那么开普勒如何得到薄圆片的体积是 $\pi r^2 l$ 呢？首先开普勒把这个薄圆片看作纵剖面是等腰梯形的底面不平行的圆柱. 把它看作如图所示无穷多个垂直薄片之和. 利用梯形的面积公式，每一个薄片的体积是 $V=alt$，t 是薄片的厚度. 故圆柱的体积为

$$V=\sum alt=l\sum at=\pi r^2 l.$$

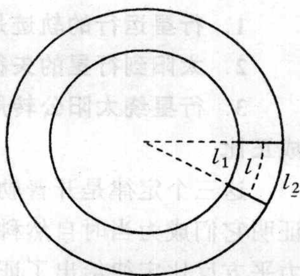


图 2.1

开普勒确信如有必要，他所得到的结果是可以严格证明的，所以他随心所欲地使用不可分量计算各种各样的旋转体的体积，他说："如果我们能够耐心地阅读阿基米德的这些艰深著作，那么我们就会得到绝对的、各方面都完善证明."〔1〕开普勒讨论了 90 多种各类体积问题，他的朴素的积分思

---

〔1〕C. H. 爱德华著，张鸿林译，微积分发展史，北京出版社，1987，P. 139.

想是卡瓦列利的不可分量原理的先导.

2. 卡瓦列利的“不可分量原理”

稍后，与开普勒同时代的意大利数学家卡瓦列利（图像6）于1629年发表了《用新方法促进的连续不可分量的几何学》(Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota，1635年出版). 在他的这篇代表作中，卡瓦列利建立了“不可分量原理”，开始系统地运用无穷小方法计算面积和体积，这是他的突出贡献. 这一理论是古希腊穷竭法向牛顿、莱布尼茨现代微积分理论的过渡. 它以下列假设为基础：线是由无穷多个点组成，面是由无穷多条线组成，体是由无穷多个面组成. 书中还提出了后来以他的名字命名的原理：“两同高的立体，如果在等高处的面积恒相等，则体积相等；如果截面积成定比，则体积之比等于截面积之比.”这一原理对平面图形也适用. 只要把体积改成面积，把截面积改成直线长. 事实上，卡瓦列利的原理隐含着极限过程. 这个原理与中国的“祖氏原理”是一样的，只不过前者比后者晚了1100多年.

卡瓦列利利用这个原理，用几何方法巧妙地求得若干曲边图形的面积，还证明了旋转体的表面积和体积公式.

试推导球的体积公式. 取半径为 r 的半球，取在一底面半径和高都为 r 的圆柱中有一同底同高倒圆锥，取底边长为1高为 r 的倒棱锥，如图2.2所示.

首先比较圆锥与棱锥，设两者在距顶点 x 处的横截面积分别为 S_A 和 S_B，两者的体积分别为 V_A 和 V_B. 又两者底面积分别为 πr^2 和1，则根据相似形面积之比等于相似比的平方有

$$\frac{S_A}{\pi r^2}=\frac{x^2}{r^2},$$

即 $S_A=\pi x^2$，同理 $S_B=\frac{x^2}{r^2}$. 则根据卡瓦列利原理有

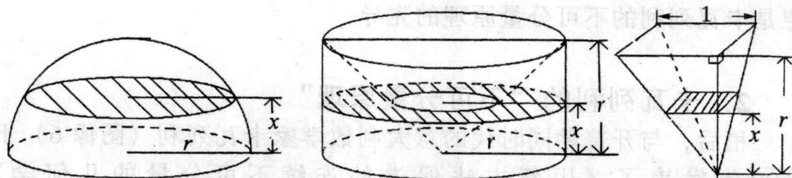


图 2.2

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{S_A}{S_B}=\pi r^2,$$

又已知棱锥体积为$\frac{r}{3}$，因而

$$V_A=\pi r^2\cdot\frac{r}{3}=\frac{\pi r^3}{3}.$$

再比较半球与圆柱去掉倒圆锥的部分，同上，设两者在距底面 x 处的横截面积分别为S_C 与S_D，两者的体积分别为 V_C 与 V_D. 同理有

$$S_C=\pi(r^2-x^2)=\pi r^2-\pi x^2=S_D,$$

则

$$V_C=V_D=\frac{2\pi r^3}{3},\ \text{因此}\ V_{球}=2V_C=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

从这个例子可以看出，卡瓦列利的方法与开普勒的方法有很大的区别，卡瓦列利首先给定两个几何图形（一般是其中一个图形的面积或体积已知而另一个未知），然后建立两个图形的一一对应的不可分量的关系. 如果两个图形的对应的不可分量之比成定值，则两图形的面积或体积的比也是这个值.

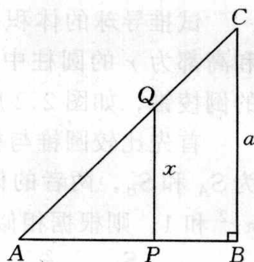


图 2.3

再如考虑高和底都等于 a 的三角形 ABC，作垂线 PQ，设 PQ 长为 x，如图 2.3，按不可分量原理，该三角形面积是

$$S = \sum_{A}^{B} x.$$

考虑图 2.3，若作一棱锥，以 A 为顶点，底面是以 BC 为一边的正方形，则 P 距顶点的距离为 x，横截面积是 x^2，把这个棱锥看作是它的横截面积之和. 于是可类似地导出

$$V = \sum_{A}^{B} x^2.$$

即 $\triangle ABC$ 中平行于底的线段的平方和，还表示抛物线 $y = x^2$ 下的面积，如图 2.4. 因为他的具有代表性的垂直截线的长度是 x^2. 如果 Q 是这一抛物线围绕它的底（即 x 轴）旋转而得到的旋转体，那么它与"顶点" A 的距离为 x 的横截面的面积为 πx^4，于是有

$$V = \sum_{A}^{B} \pi x^4 = \pi \sum_{A}^{B} x^4.$$

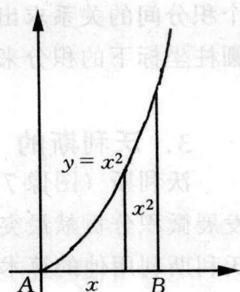


图 2.4

这些例子说明，许多求面积、体积的问题都能通过计算一个三角形中平行于底的线段之幂的形式和来解决. 卡瓦列利原理又在他的《六个几何问题》(Exercitationes Geometricae，1647) 中有所发展. 他实际上已求出相当于

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

的结果，其中 n 是正整数. 这个结果是卡瓦列利对积分学创立最重要的贡献之一，后来的一些数学家像托里切利、费马、帕斯卡及沃里斯等人也都研究过卡瓦列利得到的抛物线下面积的一般公式 $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$，并从不同角度得到了较卡瓦列利更严格的证明. 卡瓦列利的方法比任何他的前人都更接近积分学算法，莱布尼茨曾将不可分量原理誉为当时几何学的顶峰. 在以后的许多年，除了阿

基米德的著作外，不可分量原理成为数学家们研究几何学中无限小问题时引用最多的理论，对微积分的创立有重要影响.

卡瓦列利的不可分量原理继续被后来的学者所发展. 1644 年，另一位意大利数学家托里切利（Evangelista Torricelli, 1608.10.15—1647.10.25）出版了《几何学》（Opera geometrica），给出了不可分量原理对立体图形的应用. 在运用该原理确定图形的重心时，托里切利提出“通用原理”. 根据这个原理，可以利用两个积分间的关系求出图形的重心. 用现代的术语说，他的方法是用圆柱坐标下的积分来代替笛卡儿坐标下的积分.

3. 沃利斯的“无穷算术”

沃利斯（图像 7）是在牛顿与莱布尼茨之前用“代数”的方法发展微积分贡献最突出的数学家（此前的数学家大都用几何方法）. 沃利斯利用他的算术不可分量法获得了许多重要结果，其中之一就是将卡瓦列利的幂函数积分公式

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

推广到分数幂形式，他从已知的极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

出发，经类比处理，得到

$$\lim_{n \to \infty} \frac{0^{\frac{p}{q}} + 1^{\frac{p}{q}} + \cdots + n^{\frac{p}{q}}}{n^{\frac{p}{q}} + n^{\frac{p}{q}} + \cdots + n^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p+q},$$

并进而猜想

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x = \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}},$$

但是沃利斯仅对 $p=1$ 的情形证明了这一公式.

沃利斯还有另外一个成果是必须提到的，他曾经研究了四分之一单位圆面积问题，由此他得到了 π 的无穷乘积表达式．他计算由坐标轴，x 点的纵坐标和函数 $y=(1-x^2)^0$，$y=(1-x^2)^1$，$y=(1-x^2)^2$，$y=(1-x^2)^3$，…的曲线围成的面积，得到的结果分别为

$$x, x-\frac{1}{3}x^3, x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5, x-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7, \cdots,$$

但表示圆的函数是 $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$，沃利斯利用复杂的插值法算出了它的面积，并得到表达式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots} \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.\end{aligned}$$

沃利斯的工作直接引导了牛顿发现了有理数幂的二项式定理，即

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots$$

其中 $A=P^{\frac{m}{n}}$，$B=\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q$，…，$\frac{m}{n}$ 是任意有理数．二项式定理作为有力的代数工具为微积分的创立立下了汗马功劳．牛顿的二项式定理的推导过程记录在他 1664—1665 年间的一本读书笔记上，从中可以看出他是通过推广沃利斯的插值法得到这个结果的．

1667 年，英国数学家格雷戈里（James Gregory，1638.11—1675.10）发表《论圆与双曲线的实际求积》（Vera circuli et hyperbolae quadratura)，给出并证明了逼近圆与双曲线面积的方法，改进了阿基米德求圆面积的方法，并把阿基米德方法推广到一般的中心圆锥曲线中．他还最早提出收敛概念，并第一次明确指出无穷级数表示一个数，即级数的和，称为级数的极限．这些工作对于微积分的创立起了很好的促进作用．

§2.2 关于微分

文艺复兴之后，生产力水平空前发展. 如何确定非匀速运动物体的速度与加速度把瞬时变化率问题提到了日程上来；望远镜的光程设计需要确定透镜曲面上任一点的法线，这迫切需要解决求曲线上任一点的切线问题；军事上需要确定大炮的最远射程问题. 这一切促使微分学的产生，并成为微分学研究的中心问题.

1. 费马的求极值方法

较早研究曲线的切线问题的数学家是费马（图像 8）. 早在 1629 年他就有了初步的设想，1637 年，在手稿《求最大值和最小值的方法》中具体给出了求切线的方法. 用现代符号表示，PT 是曲线上一点 P 的切线. 设 QQ' 是 TQ 的增量，长度为 l. 因为 $\triangle TQP \approx \triangle PRT'$，因而 $TQ:PQ = l:T'R$. 当增量很小时，费马认为 $T'R$ 与 $P'R$ 长度差不多，因此 $TQ:PQ = l:(P'Q' - PQ)$，若将 PQ 记为$f(x)$，则有

$$TQ:f(x) = l:[f(x+l) - f(x)].$$

因此，

$$TQ = \frac{l \cdot f(x)}{f(x+l) - f(x)}.$$

费马用 l 去除上式右端的分子和分母，然后令 $l=0$（原话为去掉 l），就得到 TQ. 费马称 TQ 为次切线. 他通过这种次切线得到 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的表达式.

费马应用他的方法解决了许多难题. 虽然他的方法尚缺乏严密

性，但它具有微分学的现代标准形式．牛顿曾说："我从费马的切线作法中得到了这个方法的启示，我推广了它，把它直接地并且反过来应用于抽象方程．"[1] 拉格朗日、拉普拉斯、傅立叶等一批数学家也赞美费马是微积分的真正发明者．[2]

费马还在他的著作中给出求函数极值的方法．例如，他用的例子是将一直线段分为两个部分，使这两个部分组成的矩形面积为最大．他沿用韦达（Francois Viète，1540—1603.2.23）的记号：以大写辅音字母表示常数，以大写元音字母表示变数．将整个线段叫 B，设其一部分为 A，则矩形的面积为 $(B-A)A$．然后用 $A+E$ 代替 A，则另一部分为 $B-A-E$，矩形面积为

$$(A+E)(B-A-E)=AB+EB-A^2-2AE-E^2.$$

费马认为若要取得最大值，这两个矩形的面积应该是相等的，因而有

$$(B-A)A=AB+EB-A^2-2AE-E^2,$$

化简得 $EB=2AE+E^2$．两边同除以 E 得 $B=2A+E$．然后令 $E=0$（费马的原话为去掉 E）[3]，得 $B=2A$．费马的方法具有普遍的有效性．当函数经过一个极值时，函数在这点的值及函数在这点加上微小增量的值将是相等的，将这两个值等同起来，用增量去除，然后令 E 消失，就可以从所得的方程中确定使函数取得极值的 A 值．其方程等价于令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,\text{即 } f'(x)=0\,.$$

这已经成为求极值的常用方法，有时称为费马方法．费马求函数极值的方法引起了关于切线问题的争论，因为费马的方法也可用于求

〔1〕 Turnbull，Mathematical Discoveries of Newton.

〔2〕 卡尔 .B. 波耶著，上海师范大学数学系翻译组译，《微积分概念史》，上海人民出版社，1977，P. 173.

〔3〕 H. 伊夫斯著，欧阳绛译，《数学史概论》，山西人民出版社，1986，P. 374.

曲线的切线．费马指出，他求函数极值的方法“可以推广应用于一切优美的问题”．费马还说，他已经获得了求平面与立体图形的重心等一些其他结果．

2．笛卡儿的“圆法”

笛卡儿（图像 9）对微积分的创立做出了与众不同的特殊贡献．一方面，笛卡儿创立解析几何，改变了以往采用几何方法研究积分的状况，为牛顿和莱布尼茨最终完成微积分的创立提供了舞台，而这个舞台对于牛顿和莱布尼茨来说是不可或缺的；另一方面，笛卡儿还亲自参加了在舞台上的演出，他与费马都将坐标方法引进了微分学的研究．笛卡儿在《几何学》（La Géométrie）中提出了所谓的“圆法”．

设曲线 $y=f(x)$，求过点 $P(x,f(x))$ 的切线，如图 2.5．笛卡儿的方法是首先确定曲线在点 P 处的法线与 x 轴的交点 C 的位置，然后作该法线的过点 P 的垂线，就可得到所求的切线．

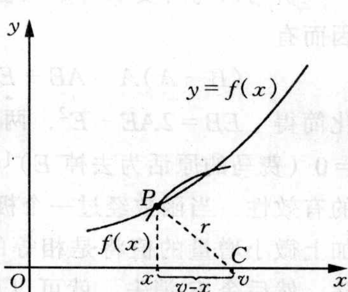


图 2.5

过 C 点作半径为 $r=CP$ 的圆，若 CP 是曲线 $y=f(x)$ 在 P 点处的法线，那么点 P 应是该曲线与圆 $y^2+(x-v)^2=r^2$ 的“重交点”(一般情况下所作圆与曲线还会交于 P 点附近的另一点)，如果 $[f(x)]^2$ 是多项式，有重交点就相当于方程

$$[f(x)]^2+(v-x)^2=r^2$$

将以 P 点的横坐标 x 为重根．但具有重根 $x=e$ 的多项式的形式必须是 $(x-e)^2\sum c_ix^i$，笛卡儿把上述方程有重根的条件写为

$$[f(x)]^2+(v-x)^2-r^2=(x-e)^2\sum c_ix^i,$$

然后用比较系数法求得 v 与 e 的关系．代入 $x=e$，就得到了用 x

表示的 v，这样过点 P 的切线的斜率就是

$$\frac{v-x}{f(x)}.$$

笛卡儿的方法在推动微积分早期发展方面有很大的影响，他的《几何学》对牛顿科学思想的产生起到了积极地促进作用.

3. 巴罗的“微分三角”

牛顿的老师、英国数学家巴罗（图像 10）是微积分学产生前的历史上的举足轻重的人物，他在 1669 年出版的《几何学讲义》(Lectiones geometricae) 中给出了另一种求切线的方法. 巴罗使用了几何方法而不像笛卡儿和费马那样使用代数方法.

巴罗提出了著名的“微分三角形”或叫“特征三角形”概念，对牛顿有较大影响. 设有曲线 $f(x,y)=0$，欲求其上一点 P 处的切线，如图 2.6. 巴罗考虑一段“任意小的弧” $\overset{\frown}{PQ}$，它是由增量 $QR=e$ 引起的. PQR 就是所谓的微分三角形. 巴罗认为当这个三角形越来越小时，它与 $\triangle TPM$ 应趋近于相似，故应有

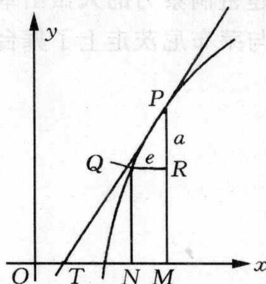


图 2.6

$$\frac{PM}{TM}=\frac{PR}{QR} 即 \frac{y}{t}=\frac{a}{e},$$

因 Q、P 在曲线上，故应有

$$f(x-e,y-a)=f(x,y)=0.$$

从上式中消去一切包含有 e、a 的幂或二者乘积的项，从所得方程中解出 $\frac{a}{e}$，即切线的斜率 $\frac{y}{t}$，于是可得到 t 值而作出切线. 巴罗的方法本质上是把切线看作当 e 和 a 趋于 0 时割线 $\overline{PQ}$ 的极限位置，并利用忽略高阶无穷小来取极限. 在这里，e 和 a 分别相当于 $\mathrm{d}x$

和 $\mathrm{d}y$，而$\frac{a}{e}$则相当于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 此外巴罗还得到了相当于

$$r\int_0^\theta \sec\theta \mathrm{d}\theta = r\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\text{和}\int_0^\theta \tan\theta \mathrm{d}\theta = \log\sec\theta$$

的定积分公式.

17 世纪的众多数学家都参与了有关微积分的研究，做出了宝贵的贡献，为微积分的诞生做了积极的准备工作，但是必须看到，他们的方法还是粗糙的，工作是分散的，而且缺乏一般性. 当时还无人认识到求面（体）积、求极值、求瞬时速度和求切线四者之间的内在联系，更未能意识到微分与积分之间的互逆关系. 历史的发展需要伟人的推动，就数学来说也是如此. 此时此刻亟需具有高屋建瓴洞察力的人做出卓越的决定性的工作. 在时代的召唤下，牛顿与莱布尼茨走上了舞台，担负起这个艰巨而伟大的历史任务.



第三章 微积分的创立

经过一个世纪的酝酿，众多数学家的工作为微积分的创立准备了条件. 就在这个时候——17 世纪中叶，两位伟大的数学天才走上了历史舞台，为微积分的创立做出了决定性的贡献，他们就是英国数学家、物理学家牛顿和德国数学家、哲学家莱布尼茨.

§3.1 牛顿的贡献

1. 牛顿生平简介

牛顿（图像 11）出生在英格兰林肯郡（Lincolnshier）格兰瑟姆镇（Grantham）伍尔索普村（Woolsthorpe）的一个农民家庭，是个遗腹子. 3 岁时母亲改嫁，牛顿由外婆抚养. 在舅舅艾斯库（Rev. W. Ayscough）的极力主张下，大约在 5 岁的时候，牛顿被送入附近的斯吉林顿和斯托克走读小学读书，1655 年，牛顿进入格林瑟姆中学. 最初牛顿对功课不感兴趣，成绩平平甚至低劣，被同学们藐视，看不到半点神童的影子. 有一次，一名蛮横无理、学习成绩又素在他之上的同学欺负牛顿，精神和肉体上的双重痛苦使牛顿忍无可忍，他奋起还击并击败了那个同学. 这时他领悟到学习

之道不过如此，只要不畏困难就可成功．从此牛顿发奋图强，不久学习成绩就超过了那个欺负过他的同学，开始在班里名列前茅．牛顿开始喜欢读书，从中学开始还养成了做读书笔记的习惯．牛顿有一本又大又厚的笔记，其中记载了他早年研究万有引力与微积分的心得，是牛顿早期数学发现的重要见证．

4 年后，17 岁时，母亲召牛顿回伍尔索普村管理农庄．尽管牛顿从立志图强那一刻起，就坚定了学习意志不喜欢农务，但为不令母亲伤心还是遵从了母命．牛顿利用一切农闲时间继续学习，一度令母亲很失望．这时牛顿的舅舅和格兰瑟姆中学校长斯托克斯（J. Stokes）极力劝说牛顿的母亲让他重新上学，斯托克斯说："在繁杂的农活中埋没这样的一位天才将是多么大的损失啊！"（历史证明斯托克斯先生多么具有远见卓识）．他还给牛顿提供了一些优惠政策，在这两个人的劝说下，也是在牛顿学习精神的感动下，牛顿的母亲终于同意让牛顿复学．在辍学 9 个月后牛顿于 1660 年秋回到了格林瑟姆中学．

1661 年 6 月，牛顿以优异成绩考入剑桥大学（图像 12），不久成为三一学院的一名减费生（subsizar）．牛顿成为减费生是因为家境贫寒，他在剑桥大学要从事一定的勤务劳动，以减免学费．在剑桥大学的前两年里，牛顿顺利地掌握了逻辑与哲学课程，这与他在入学前就已阅读过舅舅送给他的一本桑得生（Sanderson）的《逻辑学》获得的收获不无关系．牛顿基本上是以自学的方式学习数学．在这两年里，牛顿还阅读了亚里士多德（Aristotle，前 384—前 322）的《工具篇》、《伦理学》，笛卡儿的《哲学原理》（Principia philosophiae）及其他人的一些哲学著作．

从三年级开始，牛顿开始阅读大量的自然科学著作，主要有：伽里略的《恒星使节》（Sidereus nuncius）、《两大世界体系的对话》（Dialogo dei massimi systemi），开普勒的《光学》（Astronomiae pars Optica）；牛顿还逐步掌握了笛卡儿的《几何学》和沃利斯《无穷

算术》(Arithmetica Infinitorum);此外牛顿的阅读范围还有韦达、费马和惠更斯等人的著作．这些著作中有两本书对牛顿创立微积分起到了决定性的影响，它们是笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》．笛卡儿的解析几何为牛顿创立微积分提供了施展才华的舞台，“沃利斯曲线”$(1-x^2)^n$ 的求积问题后来导致牛顿二项式定理的发现．

另一方面，在数学上牛顿还幸运地得到时任卢卡斯教授的巴罗的悉心指导．后来牛顿追溯流数概念的来源时回忆说：“巴罗博士当时讲授关于运动学的课程，也许正是这些课程促使我去研究这方面的问题．”1665 年初，牛顿获得剑桥大学的文学士学位．在这一年里，伦敦爆发了鼠疫并殃及到剑桥．8 月份剑桥被迫关闭，牛顿回到了家乡伍尔索普村．在家乡度过的这段时间是牛顿一生的重要转折点，也可以说是牛顿科学生涯中的黄金岁月．牛顿在乡间可以全身心地思考各种各样的问题，用他的聪明才智和丰富的知识探索大自然的奥秘，还流传下来许多生动有趣的故事．

牛顿一生的三大发明：流数术、万有引力定律和光学分析基本都完成于 1665—1667 年间，这时牛顿年仅 23 岁．家喻户晓的“苹果落地”的故事就发生在这个时候．事实上，牛顿是经过大量计算才得到万有引力定律的．他在手稿里写到：“就在这一年，我开始想像把重力伸展到月球的轨道上……由此我把使月球在轨道上运行的力与地面上的重力相比较，发现它们差不多相密合．这一切都是在瘟疫年 1666 年成功的．因为在那些日子里，我正处在发明旺盛的时代，对于数学和哲学的热心，比以后任何时代更甚．”

1667 年刚过复活节，牛顿返回剑桥，但他却未宣布自己的重大发现．翌年 4 月，牛顿获得硕士学位并成为高级学者 (major fellow)．同年，牛顿为了避免折射望远镜的色像差，发明并亲手制作了第一架反射望远镜．仅此一项就足以使牛顿名垂青史．

返回剑桥两年后，牛顿的学识达到了一个新的水平，他撰写微

积分和光学论文并协助修改巴罗的《几何与光学讲义》(Lectiones opticae et geometricae, 1669). 牛顿的才华得到巴罗的高度评价和赏识. 1669 年, 巴罗坦然宣称牛顿的学识已经超过自己, 当年 10 月, 他把"卢卡斯 (Lucas) 教授"[1] 的职位让给牛顿, 当时牛顿年仅 26 岁. 巴罗让贤成为数学史上的一段佳话.

牛顿发明的流数术, 除了他的少数朋友之外, 长久以来不为人知. 1684 年, 英国数学家、天文学家哈雷 (Edmond Halley, 1656.11.8—1743.1.14) 专程到剑桥拜访牛顿, 向他请教行星轨道方面的问题. 牛顿很快得到答案并写成论文寄给皇家学会, 这篇论文是《自然哲学之数学原理》(Philosophiae naturalis principia mathematica) 的初稿. 同时牛顿将论文扩充为讲义《论运动》(De motu corporum), 这成为当年秋季牛顿卢卡斯讲座的主要内容. 在随后的十多年里, 牛顿全身心地投入到《自然哲学之数学原理》的创作之中, 直到 1687 年春, 《原理》的第三卷"宇宙体系"杀青. 在哈雷的资助下这本书在当年夏天正式出版, 《自然哲学之数学原理》的出版具有划时代的意义, 是微积分创立的重要标志之一, 对欧洲立即产生了巨大的影响.

1696 年, 牛顿谋得伦敦造币局总监之职, 因工作业绩甚佳, 于 3 年后升迁造币局长. 这促使他于 1701 年下决心辞掉了卢卡斯教授职位, 此前的 5 年里一直由别人代理这个职位. 除了任造币局长之职外, 1703 年牛顿出任英国皇家学会会长, 此时距他最初当选皇家学会会员已 31 年之久. 1705 年, 牛顿被安娜女王 (Queen Anne, 1665—1714) 封为爵士, 这是他一生荣耀的顶峰. 晚年的牛顿在伦敦度过, 这时他已经致力于哲学、公务和神学研究甚少科

[1] H. 卢卡斯 (Lucas) 曾就读于剑桥圣约翰学院, 代表剑桥出任过国会议员. 根据他的遗嘱, 在剑桥设一数学教授职位, 年薪仅低于大学院的院长, 当时为 100 英镑, 由其捐助土地的收入资助, 巴罗是第一任卢卡斯教授 (1664—1669).

学贡献，不过他的数学思维依旧敏锐．牛顿晚年曾两次面对波及全欧洲性质的数学挑战．1696 年，欧洲大陆上的数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667.8.6—1748.1.1）在《教师学报》（Acta eruditorum）上提出两个问题，第一个是“最速降线”问题，问题提出后半年时间悬而未决．于是，伯努利在 1697 年元旦发表著名的公告（Programma)，再次向“全世界最能干的数学家”挑战．元月末的一天，牛顿收到一封来自法国的信，信中转达了伯努利的挑战．牛顿仅用晚饭后的时间就一举解决了两个问题，并将结果写成论文匿名发表在《哲学汇编》（Philosophical Transaction，1697，No.224）上．伯努利看后不禁赞叹说：“从这只利爪，我认出了这只雄狮.”

由于罹患肺炎与痛风症，1727 年 3 月 31 日，牛顿在伦敦与世长辞，牛顿终身未婚，他的葬礼在威斯敏斯特大教堂耶路撒冷厅隆重举行．当时参加葬礼的法国启蒙思想家伏尔泰（F. M. A. Voltaire）后来描述了当时的盛况：“英国的大人物们都争先恐后地去抬牛顿的灵柩，并以此为荣……英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的君主.”人们对牛顿的热爱由此可见一斑．然而，由于牛顿的伟大科学创造，人们常把牛顿偶像化，加以神话般的顶礼膜拜．最突出的例子就是三年后诗人波普（Alexander Pope，1688—1744）为牛顿所作墓志铭中留下的诗句：“自然和自然的规律隐藏在茫茫黑夜里，上帝说：‘让牛顿降生吧！’于是一切都豁然明朗(Nature and nature’s laws lay hide in night：God said，‘Let Newton be！’And all was light)．”诗人的幻想夸大了牛顿的天才，却忽略了他刻苦努力的一面．

在剑桥三一学院教堂内，立有牛顿的全身雕像（图像 13）（在其背面是牛顿的导师巴罗的雕像）供后人瞻仰．

2. 二项式定理的发现

任意次幂的二项式展开定理是牛顿创立微积分的先决条件之一，这个定理也是他数学生涯中第一个创造性成果．幸运的是，牛顿的许多数学手稿都完整无损地保留了下来，载有对二项定理的推导的手稿恰好包含其中．手稿显示，牛顿是在 1664—1665 年间进行这一原始推导的，但一直到 1676 年才把这项成果在致皇家学会秘书奥尔登堡（H. Oldenburg）的两封信中正式公布．牛顿给出了如下形式的二项定理：

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots$$

同时指出“此处的 $P+PQ$ 代表要求其根或任意次幂或幂的根的量；P 表示这个量的首项，Q 是首项相除的余项，m/n 是$P+PQ$ 的幂指数，不管它是整数还是分数、正数还是负数……在计算过程中要求各商项用 A，B，C，D 等来表示，比如，第一项 $P^{m/n}$记作A；第二项$\frac{m}{n}AQ$ 记作 B；第三项 $\frac{m-n}{2n}BQ$ 记作 C；等等．”在大约 150 年后，挪威数学家阿贝尔（Niels Henric Abel, 1802.8.5—1829.4.6）证明了，这个定理对于复数指数（在适当的限制下）也是正确的．

写这两封信是为了答复莱布尼茨的有关询问．1676 年 6 月，牛顿在《前信》（epistola prior）写到：“因为他（莱布尼茨）有意了解英国人在这一领域的工作，我本人几年前又曾研究过这一理论，因此我将自己得到的一些结果寄给你，以满足（至少部分地）他的需要．”但莱布尼茨不知其所以然，故复信要求牛顿说明其来源．于是同年 10 月，牛顿在《后信》（epistola posterior）中给出了自己推导二项定理的过程．

前面已经说过，牛顿阅读了沃利斯的《无穷算术》. 在这本书中，沃利斯考虑数列

$$a_n=\int_0^1(1-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x \text{〔1〕} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

通过对更一般的数组

$$a_{p,q}=1\Big/\int_0^1(1-x^{1/p})^q\mathrm{d}x \quad (p,q=1,2,3,\cdots)$$

进行插值并取特例 $a_{1/2,1/2}$ 而求得表示圆面积的无穷乘积. 受沃利斯的启发，牛顿独辟蹊径，他不考虑数列而是考虑函数序列

$$f_n(x)=\int_0^x(1-t^2)^{n/2}\mathrm{d}t \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

的插值. 当 n 为偶数时，牛顿用沃利斯的结果

$$\int_0^x t^q\mathrm{d}t=\frac{x^{p+1}}{p+1}$$

得出 $f_n(x)$：

$$f_0(x)=1(x),$$

$$f_2(x)=1(x)+1\left(-\frac{1}{3}x^3\right),$$

$$f_4(x)=1(x)+2\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+1\left(\frac{1}{5}x^5\right),$$

$$f_6(x)=1(x)+3\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+3\left(\frac{1}{5}x^5\right)+1\left(-\frac{1}{7}x^7\right),$$

$$\cdots$$

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}\left[(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right].$$

牛顿试图对如上的函数序列的系数插值，当 $n=1$ 时，将得到单位圆面积的四分之一. 他注意到在上面的序列中，所有级数的第一项都是 x，第二项 $(0/3)x^3,(1/3)x^3,(2/3)x^3,(3/3)x^3,\cdots$ 构成算术

〔1〕为便于叙述和理解，此处采用现代积分符号表示. 必须注意，在牛顿和沃利斯的原著中都未引进积分符号∫，这个符号是莱布尼茨首先采用的.

级数，因此插值后的中间级数前两项应该是

$$x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^{3}\right), x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^{3}\right), x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^{3}\right), \cdots.$$

为了计算其余各项的系数，牛顿指出当 n 为偶数时，诸系数 a_{mn} 构成帕斯卡三角，且满足关系 $a_{m,n+2}=a_{m-1,n}+a_{m,n}$. 接着，牛顿利用类比推理假定对奇数 n，插值后的 a_{mn} 仍然有这个关系. 由此可以从已得到的 $a_{0,n}=1$，$a_{1,n}=n/2$ 逐步推算出其余的 a_{mn}.

在用插值法求出积分 $\int_0^x (1-t^2)^m \mathrm{d}t$ 的表达式后，牛顿将结果逐项微分就立刻得到二项定理：

$$(1-x^2)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{m}{k}x^{2k},$$

其中

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

在牛顿之前，正整数幂的二项展开已经人所共知. 法国数学家帕斯卡早就研究过二项展开的系数规律，提出了由这些系数所组成的所谓的“帕斯卡三角形”，这一三角形早在600年前已由中国古代数学家贾宪（11世纪）发现. 牛顿把正整数的情形推广到正负有理数幂的形式，这是从有限向无限的飞跃. 这一飞跃为无穷级数研究开辟了广阔的前景，也为微积分的诞生准备了条件，成为微积分不可或缺的工具. 牛顿利用自己发现的二项展开定理得到了其他一系列函数的无穷级数.

3. 牛顿的流数术

牛顿对微积分的研究肇始于1664年秋，当时他认真研究了笛卡儿的《几何学》，对笛卡儿求切线的方法很感兴趣并且试图找到更好的方法. 就在这个时候，牛顿首创了用小 o 代表 x 的无限小且最终趋于0的增量.

在家乡躲避瘟疫期间，牛顿对微积分的研究取得了突破性进展. 据牛顿自述，1665 年 11 月发明正流数术（微分法），翌年 5 月建立反流数术（积分法）. 此后，牛顿开始整理这两年的研究成果，在同年 10 月写出了一篇总结性论文. 这篇文章当时并未发表，但在牛顿的朋友和同事中传阅. 此文现在以《1666 年 10 月流数简论》（The october 1666 tract on fluxions）闻名于世，并且是数学史上首篇系统的微积分文献.〔1〕

在《流数简论》中，牛顿事实上引入了流数的概念，只不过是以速度的形式给出. 他提出的流数计算的基本问题是：

Ⅰ“设有两个或多个物体 A，B，C，…在同一时刻内描画线段 x，y，z，…. 表示这些线段关系的方程已知，求它们的速度 p，q，r，…的关系.”

Ⅱ“已知表示线段 x 和运动速度 p，q 之比 p/q 的关系方程式，求另一线段 y.”

对于多项式情形Ⅰ的解法是：首先，将所有的项移到方程的一边，使其和等于0；然后，各项乘以 p/x 的与该项中 x 的幂次相等的倍数；接着，各项乘以 q/y 的与该项中 y 的幂次相等的倍数；各项再乘以 r/z 的与该项中 z 的幂次相等的倍数. 若有更多的未知量，则依此类推. 最后令所有乘积之和为0，此方程就给出了速度 p，q，r，…的关系式. 简言之，对多项式 $f(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j=0$ 问题，Ⅰ的解为

$$\sum\left(\frac{ip}{x}+\frac{jq}{y}\right)a_{ij}x^iy^j=0.$$

为了证明这个结果，牛顿采用了一个新概念，即时间 t 的无穷小瞬（moment）o——它指的是流量在无穷小的时间间隔 o 中增加

---

〔1〕 李文林：《牛顿》，载《世界著名数学家传记上》，北京，科学出版社，1995，P.542.

的无穷小量，并指出："正如速度为 p 的物体 A 在某一瞬间描画的无穷小线段为 $p \times o$，速度为 q 的物体 B 在同一瞬间将描画出无穷小线段 $q \times o$……，这样，若在某一瞬间已描画的线段是 x 和 y，则下一个瞬它们将变成 $x+po$ 和 $y+qo$．"牛顿分别以 $x+po$ 和 $y+qo$ 代换方程中的 x 和 y，例如在方程

$$x^3 - abx + a^3 - dyy = 0$$

中作这样的代换后，再利用二项展开得

$$x^3 + 3pox^2 + 3p^2xo^2 + p^3o^3 - dy^2 - 2dqoy - dq^2o^2 - abx - abpo + a^3 = 0,$$

消去和为 0 的项 $x^3 - abx + a^3 - dyy$，剩下

$$3pox^2 + 3p^2xo^2 + p^3o^3 - 2dqoy - dq^2o^2 - abpo = 0,$$

以 o 除之得

$$3px^2 + 3p^2xo + p^3o^2 - 2dqy - dq^2o - abp = 0.$$

此时，牛顿说："其中含 o 的项为无限小"，略之得

$$3px^2 - 2dqy - abp = 0,$$

即为所要求证的解．实际上，这里 $p = \dot{x}$，$q = \dot{y}$，带入上式为

$$3\dot{x}x^2 - 2d\dot{y}y - ab\dot{x} = 0$$

对于问题Ⅱ，牛顿给出的解法实际上是问题Ⅰ的解的反运算．必须指出的是，《流数简论》中有一个问题讨论了如何借助这种反运算来求积，从而建立了**"微积分基本定理"**．

牛顿推导微积分基本定理思路如下，如图 3.1：设 $ab = x$，曲边三角形 $abc = y$ 为已知曲线 $q = f(x)$ 下的面积，作 $\mathrm{d}e \parallel ab \perp a\mathrm{d} \parallel be = p = 1$，当垂线 cbe 以单位速度向右移动时，eb 扫出面积 $\square abe\mathrm{d} = x$，变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p = 1$．$cb$ 扫出面积 $\triangle abc = y$，变化率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = q$，由此得到 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{p} = q = f(x)$，这就是说，面积 y 在点 x 处的变化率是曲线在该处的 q 值．这就是微积分基本定理利用问题Ⅱ的解法就可求得面积 y．作为例子牛顿以 $q = x^n$ 说明该曲线下

的面积是$\frac{x^{n+1}}{n+1}$. 反之，纵坐标为$\frac{x^{n+1}}{n+1}$的曲线的斜率是 x^n.

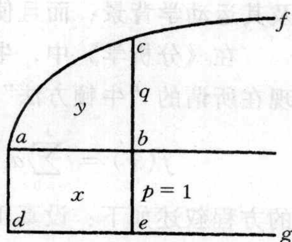


图 3.1

《流数简论》标志着系统的微积分算法的诞生，尽管它在很多方面还很不成熟. 牛顿是第一个将求面积与求切线之间这种互逆关系作为一个普遍规律揭示的人，没有超凡的洞察力对此是无能为力的. 牛顿指出："一旦（反微分）问题可解，许多问题也将迎刃而解." 牛顿将正反微分运算应用于求曲线的切线、曲率、拐点、求曲线长、求积等 16 类问题，展示了牛顿算法的普遍性与系统性.

1667 年春，牛顿在避完瘟疫返回剑桥后，开始埋头苦干，孜孜不倦地努力改进和完善自己的学说. 1669 年 7 月，牛顿为了维护自己在无穷级数方面的优先权作了一篇论文提交给巴罗，题为《用无限多项方程的分析学》(De Analysiper Aequationes Infinitas)，简称《分析学》，直到 1711 年才正式发表. 在这篇论文中，牛顿用级数来计算面积、流数及解方程等. 微积分与无穷级数方法紧密结合是《分析学》的特点.

论文的一开始就叙述了计算曲线$y=f(x)$下面积的法则. 第一个法则指出，如果 $y=ax^{m/n}$，则所求面积为$z=\frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}$. 证明如下，取 x（而非 t）的无穷小瞬 o，并以 $x+o$ 和 $z+oy$ 分别代替 x 和 z，则有

$$z+oy=\frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n}.$$

用二项定理展开后，再用 o 除方程两边，消去含 o 的项即得到 $y=ax^{m/n}$. 反过来，就知道曲线 $y=ax^{m/n}$ 下的面积为$z=\frac{na}{m+n}\cdot x^{(m+n)/n}$. 牛顿在《分析学》中回避了《流数简论》中的流数概念

及其运动学背景，而且使用的无穷小瞬在性质上也是模糊的.

在《分析学》中，牛顿给出了一种解方程的逐次近似方法，即现在所谓的“牛顿方法”. 用这种方法解多项式方程

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = 0 \tag{3.1}$$

的方程叙述如下：设真正的根为 x_*，给定它的近似值 x_n，把 $x_* = x_n + p$ 代入（3.1）式，得到关于 p 的方程

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{k} a_i x_*^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i (x_n + p)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i (x_n^i + i x_n^{i-1} p + \cdots) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i x_n^i + p \sum_{i=0}^{k} i a_i x_n^{i-1} + \cdots, \end{aligned}$$

所以 $0 = f(x_n) + p f'(x_n) + \cdots$.

其中“…”表示 p 的非线性项. 忽略这些非线性项，我们得到

$$p \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

于是

$$x_* \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

这就是当用牛顿法解方程时根的第 $n+1$ 个近似值的熟知公式.

然后牛顿把他的逐次近似法主要用于“级数的反演”. 例如，给定关于双曲线 $y = 1/(1+x)$ 下的面积 z 的级数

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots,$$

他要通过 z 解出 x.

他仅考虑这个级数的前 5 项（考虑多少项由需要而定）求解，

因此舍弃所有高于5次的项，用逐次近似法：

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-z=0. \tag{3.2}$$

忽略一切非线性项，得到第一个近似值

$$x_1\approx z.$$

把 $x=z+p$ 代入（3.2）式，得到

$$\left(-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5\right)+p(1-z+z^2-z^3+z^4)$$
$$+p^2\left(-\frac{1}{2}+z-\frac{3}{2}z^2+2z^3\right)+\cdots=0. \tag{3.3}$$

忽略 p 的非线性项，得到

$$p\approx\frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4-\frac{1}{5}z^5}{1-z+z^2-z^3+z^4}=\frac{1}{2}z^2+\cdots,$$

于是，得到第二个近似值

$$x_2\approx z+\frac{1}{2}z^2.$$

把 $p=\frac{1}{2}z^2+q$ 代入（3.3）式，得到

$$\left(-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{20}z^5\right)+q\left(1-z+\frac{1}{2}z^2\right)+\cdots=0,$$

于是

$$q=\frac{\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5}{1-z+\frac{1}{2}z^2}=\frac{1}{6}z^3+\cdots.$$

因此，第三个近似值是

$$x_3\approx z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3.$$

如此继续下去，牛顿得到

$$x_*\approx z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots.$$

牛顿用上述的级数反演法和自己的流数术第一次得到了 $\sin x$

和 $\cos x$ 的幂级数，推导过程如下：

考虑 $x^2+y^2=1$,如图 3.2.此时角 $\theta=\arcsin x$(度量单位为弧度)是圆扇形 OQR 的面积的 2 倍.同时,牛顿知道,把$\sqrt{1-x^2}$进行二项式展开,然后逐项积分,则得到弓形 $OPQR$ 的面积

$$x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{112}x^7+\cdots.$$

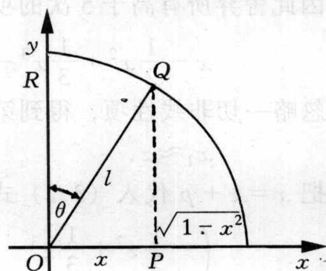


图 3.2

由此可知

$$\begin{aligned}\theta&=2\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{112}x^7+\cdots\right)-x\sqrt{1-x^2}\\&=2\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{112}x^7+\cdots\right)\\&\quad-x\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\cdots\right),\end{aligned}$$

$$\theta=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots.$$

即 $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{40}x^5+\dfrac{5}{112}x^7+\cdots.$

然后，牛顿通过对上式的反演得到了正弦函数的幂级数

$$\sin\theta=\theta-\frac{1}{6}\theta^3+\frac{1}{120}\theta^5-\frac{1}{5040}\theta^7+\cdots.$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^4-\frac{1}{720}\theta^6+\cdots$$

两年后，牛顿又写了一部专著来论述流数法，书名为《流数法与无穷级数》(The method of fluxions and infinite series).《流数法》完成于 1671 年，这是牛顿数学方面的代表作，但直到 1736 年才正式发表．此专著是 1666 年 10 月的《流数简论》的直接发展．在这部著作里，牛顿又恢复了运动学的观点，并首次引进了**“流数”**(flucxion) 这一术语.

牛顿对《流数法》中的流数概念作了这样的解释：“我把时间

看作是连续流的流动或增长，而其他量则随着时间而连续增长．我从时间的流动性出发，把所有其他变动的量称为**流量**（fluent 或 flowing quantities），量的增长速度称为**流数**，又从时间的瞬息性出发，把任何其他的量在瞬息时间内产生的部分称**瞬**（moment）……某流量增加的固定比率称为**主流数**（principal fluxion），还可将任何其他流的流数与主流数比较．"〔1〕牛顿用流数语言表述的微积分的基本问题是："已知流量之间的关系，求流数的关系"，反之"已知表示量的流数之间的关系的方程，求流量之间的关系"．流数语言使牛顿的微积分算法在应用方面获得了更大的成功．这门新兴学科就被称作"**流数术**"或"**流数法**"．

在这部专著中，牛顿明确给出了求极值的方法：通过解方程 $f'(x)=0$，可求出使得 $f(x)$ 达到极值的点．牛顿还得出了许多重要结果，包括（用现代符号表示）：

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

在代换 $x=\psi(z)$ 之下变换为

$$\int f(\psi(z))\psi'(z)\mathrm{d}z,$$

以及分部积分公式

$$\int v\mathrm{d}u = uv - \int u\mathrm{d}v.$$

牛顿在书中列出了两个积分表．第一个表的标题是"与直线图形有关的曲线一览表"，其中列出了相应的面积 $t=F(z)$ 能够通过微分或反微分明确算出的一些曲线 $y=f(z)$．

第二个标题是"与圆锥曲线有关的曲线一览表"．其中列出了一些曲线 $y=f(x)$，相应的面积能够通过适当的圆锥曲线下的面积来表示．即通过形如

---

〔1〕D. T. Whiteside 编 The mathematical papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, 1967－1981; Vol. Ⅲ, P. 17.

$$\int \frac{dx}{a + bx} \text{或} \int \sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$$

的积分表示.

在《流数术与无穷级数》中，牛顿还给出了大量的微积分结果，比如他已经得到了求曲线弧长的公式，用现代符号表示就是

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

1687 年，牛顿的《自然哲学之数学原理》(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica）简称《原理》出版，这本书是数学史上最重要的经典名著之一. 在本书中，牛顿首次公开表述了他的流数术. 此时距离他创立流数术已经 22 年了. 牛顿迟迟未能发表自己的成果，可能是由于他意识到自己的成果还不够完善.

《原理》中没有明显的分析形式的微积分运算，整部著作是用综合几何的语言写成的. 古希腊的影响在牛顿身上还留着深深的印记，牛顿在此书的开头说："几何学的荣耀在于，它从别处借用很少的原理，就能产生如此众多的成就."[1] 在书的第一卷第一章的一开头，牛顿通过给出 11 个引理建立了"首末比方法"，是以几何的形式表述出来的. 下面以前两个引理为例.

引理 1 量以及量的比值，在任何有限时间范围内连续地向着相等接近，而且在该时间终了前相互趋近，其差小于任意给定值，则最终必然相等.

证明 若否定这一点，可设它们最终不相等，令 D 表示其最终的差. 这样它们不能以小于差 D 的量相互趋近，而这与命题矛盾.

这个引理可以看作初步的极限定义. 接着，牛顿便在引理 2 中用极限过程来定义曲边形的面积.

引理 2 任意图形 $AacE$ 由直线 Aa、AE 和曲线 acE 组成，其

〔1〕［英］I. 牛顿著，王克迪译：《自然哲学之数学原理　宇宙体系》，武汉出版社，1992，P. 17～18.

上有任意多个长方形 Ab，Bc，Cd，等等，它们的底边 AB、BC、CD 等都相等，其边 Bb、Cc、Dd 等平行于图形的边 Aa，又作正方形 $aKbl$，$bLcm$，$cMdn$ 等：如果将长方形的宽缩小，使长方形的数目趋于无穷，则内切图形 $AkbLcMdD$，外切图形 $AalbmcndoE$ 和曲边图形 $AabcdE$ 将趋于相等，它们的极限比值是相等比值，如图 3.3.

证明 因为内切图形与外切图形的差是长方形 Kl，Lm，Mn，Do 等的和，即（由它们的底相等）以其中一个长方形的底 kb 为底，以它们的高度和为高的矩形，也就是矩形 $ABla$．然而由于宽 AB 无限缩小，所以该矩形也将小于任何一个给定空间．所以（由引理 1）内切图形和外切图形最后趋于相等，而居于其中间的曲线图形更是与它们相等了．

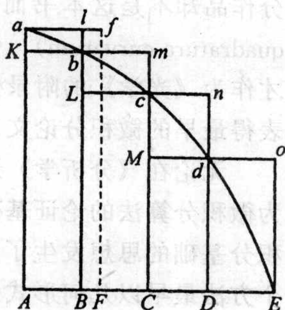


图 3.3

此外，牛顿还证明了：给定曲线弧 AB 以及相应的弦和切线段，当 A 与 B “相接近而最终结合时”，“弦、弧及切线段间相互的最终比为等量比”，等等．

为了明确最终比的概念，牛顿在引理后的附注中进一步指出：“可能会有人反对，认为不存在将趋于零的最后比值，因为在量消失之前，比率总不是最后的，而当它们消失时，比率也没有了．……将消失的量的最后比可以理解为既不是这些量消失之前的比，也不是之后的比，而是它消失那一瞬间的比．……消失量的最终比实际上并非最终量之比，而是无限减小的量的比所趋向的极限．它们无限接近这个极限，其差可以小于任意给定的数，但却永远不会超过它，并且在这些量无限减小之前也不会达到它．”

在《原理》中出现了明显的极限过程，牛顿似乎极力要把微积分的基础建立在极限的方法之上，但同时他又保留了无穷小瞬的概

念．他试图给微积分的基础下一个严格的解释，但由于当时条件的限制他还不可能做到这一点．微积分基础严格化问题留给了后来人．《原理》中，牛顿将自己的流数术应用于引力、流体力学、潮汐、声、光、彗星甚至宇宙体系．作为一种新兴的数学工具，流数术显示了强大的威力，同时也成为一个新的丰富多彩的数学天地．

《自然哲学之数学原理》固然重要，但若论牛顿最成熟的微积分作品却不是这本书而是一篇论文，题目为《曲线求积术》（De quadratura curvarum）．牛顿在 1691 年完成这篇论文，直到 1704 年才作为《光学》的附录公开发表，这篇论文成为牛顿写得最晚而发表得最早的微积分论文．

无论在《分析学》还是在《流数法》里，牛顿都是以无穷小作为微积分算法的论证基础．大约从 17 世纪 80 年代开始，牛顿的微积分基础的思想发生了变化，他提出了所谓的“首末比方法”．这个方法最早以几何形式出现在《自然哲学之数学原理》中，其详尽的分析描述是在《曲线求积术》中给出的．

在此，牛顿回避了无穷小量并摒弃了自己过去那种随意忽略无穷小瞬 o 的做法．牛顿指出：“在数学中最小的误差也不能忽略．……在此，我认为数学的量不是由非常小的部分组成的，而是用连续的运动来描述的．”在此基础上定义了流数概念后，牛顿又说：“流数之比非常接近于在相等但却很小的时间间隔内生成的流量的增量比，确切地说，它们构成初生增量的最初比，但可用任何与之成比例的线段来表示．”牛顿用几何方法把流数解释为增量消失时获得的最终比．比如：为了求 $y=x^n$ 的流数，令 $x+o$ 代替 x，则 x^n 变作

$$(x+o)^n=x^n+nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\cdots\cdots,$$

则两变化的最初比为：

$$\frac{(x+o)\ -x}{(x+o)^n-x^n}=\frac{1}{nx^{n-1}+\frac{n\ (n-1)}{2}x^{n-2}\cdot o+\cdots\cdots},$$

接着"设增量 o 消失，它们的最终比就是 $\frac{1}{nx^{n-1}}$"，这也是 x 的流数与 x^n 的流数之比. 这种"首末比方法"等价于求函数的自变量与因变量之比的极限.

牛顿在《曲线求积术》中首次引进了后来被广泛使用的流数符号：用字母 x，y，z 等表示流量，用 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 等表示对应的流数；$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 的流数用 $\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$ 表示，称为二次流数，更高次的流数依此类推.

牛顿的贡献是多方面的，在数学方面除了创立微积分外，牛顿的研究还涉及代数、解析几何、综合几何、代数几何、数值分析、概率论等. 而在物理、光学和天文方面的贡献与数学相比也毫不逊色. 毋庸置疑，牛顿是一位伟大的天才. 但是不管别人如何看待自己，牛顿却总是谦逊地将自己的科学发现归功于前人的启示. 在谈到他的光学成就时，牛顿在 1676 年致胡克（Robert Hooke，1635.7.18—1703.3.3）的信中说过这样的名言："如果我看得更远些，那是我站在巨人肩膀上的缘故."临终前他对友人说："我不知道世人将怎样看我. 我自己不过是一个在海边玩耍的小孩，偶然拣到一些比平常更光滑的卵石或更美丽的贝壳并因此沾沾自喜. 而在我面前，却仍是一片未知的真理的海洋."牛顿的谦逊态度，孜孜不倦精益求精的钻研精神无不令后人敬仰.

§3.2 莱布尼茨的贡献

1. 莱布尼茨生平简介

莱布尼茨（图像 14）出身于书香世家，他的父亲是莱比锡大

学的道德哲学教授，母亲也出身教授家庭．生长在这样的家庭环境里，耳濡目染，莱布尼茨从小就聪颖好学．不幸的是在其 6 岁时父亲去世，但幸运的是父亲给他留下很多藏书，为小莱布尼茨提供了良好的学习条件．母亲是一位有知识有见地的贤惠女子，她独自肩负起培养儿子的重任．在小莱布尼茨 8 岁时，母亲把他送入莱比锡当时最好的学校——尼古拉学校学习拉丁文、希腊文、修辞学、算术、逻辑、音乐等等．这时小莱布尼茨表现了极高的哲学天赋，14 岁时对逻辑学产生了浓厚的兴趣，甚至试图改进亚里士多德的范畴理论．

1661 年，莱布尼茨进入莱比锡大学学习法律，他直接上二年级的人文学科的课程，与此同时，他广泛阅读并研究了大量哲学和科学著作，其中包括培根、伽里略、开普勒、霍布斯（Thomas Hobbes，1588.4.5—1679.12.4，英国数学家、哲学家）、笛卡儿等人的著作．1663 年 5 月，莱布尼茨以题目为《论个体原则方面的形而上学争论》（Disputatio Metaphysica de principio Indiuidui）的论文获得学士学位．同年夏季，莱布尼茨进入耶拿大学并在次年 1 月以论文《论法学之艰难》（Specimen difficultatis in lure）获得硕士学位，在此期间他系统地学习了解析几何．

1666 年莱布尼茨完成一篇论文，题目为《论组合的艺术》（De Arte Combinatoria）．其中表述了某些现代计算机理论的先驱思想：一切推理、一切发现，不管是否用语言表达，都能归结为诸如数、字、声、色这些元素的有序组合．他以这篇论文向莱比锡大学申请博士学位，但是遭到拒绝，理由是他太年轻（他年仅 20 岁）．他一气之下离开莱比锡赴纽仑堡附近的阿尔特多夫（Altdorf）大学，1667 年 2 月，他以前面的这篇论文获得阿尔特多夫大学的法学博士学位．他谢绝了这所大学对他的聘请，参加了当地的一个团体，并通过该团体结识了一些政界人物，从此莱布尼茨开始投身政治．

1671 年，通过外交活动莱布尼茨开始了书信形式的与外界的

广泛联系．1672年，莱布尼茨奉迈因茨（Mainz）选帝侯之命，作为一名外交官出使巴黎，目的是游说法国国王路易十四（Louis XIV，Le Grand）放弃进攻德国．尽管他这次的政治使命以失败而告终，但却在巴黎居留期间（1672—1676年）开始了自己的学术生涯．当时，巴黎是欧洲的文化中心，在那里，莱布尼茨增进了交流，扩大了视野．莱布尼茨结识了大量的数学家和科学家，特别是与惠更斯（Christiaan Huygens，1629.4.14—1695.7.8）的交往激起了他对数学的浓厚兴趣．就是在这个时期他的一生的许多科学发现开始发轫，其中包括微积分，以及制作了一台能够进行加、减、乘、除四则运算的计算机．

1673年初，为促进英国与荷兰之间的和解，他以调停人的身份前往伦敦，但还是未能完成使命，3月份返回巴黎．但在巴黎期间，他趁机与英国学术界的著名学者取得了联系．

4月，莱布尼茨被推举为英国皇家学会会员．同年12月，他的保护人去世，他失去了职位和薪酬．莱布尼茨试图在法国政界或科学界谋职，但都以失败告终．在此情况下，他只好接受汉诺威布伦瑞克公爵约翰·弗里德里希（Johann Friedrich）的邀请离开巴黎前往汉诺威．

莱布尼茨在1676年10月4日离开巴黎，11月末抵达汉诺威．在此期间，他取道伦敦和荷兰，并在荷兰见到了列文胡克（A. U. Leeuwenhoek），此人用显微镜看到了以往不曾看到过的微观世界，这对莱布尼茨的哲学思想颇有影响．抵达汉诺威后，莱布尼茨担任了布伦瑞克公爵府的法律顾问兼图书馆馆长，从此定居汉诺威．

定居汉诺威后，莱布尼茨开始全身心地投入哲学和数学研究，参加各种学术和社会活动．他的哲学思想日臻成熟，声名日益远播，生活日渐富足．1682年，他与别人合办了拉丁文杂志《教师学报》（又译《学艺》或《学术记事》）（Acta eruditorum），并在上面发表了大量论文．

1679年，布伦瑞克公爵约翰·弗里德里希去世，其弟奥古斯都(Ernestus Augustus)即位，莱布尼茨留任原职. 为了给布伦瑞克家族编写历史，莱布尼茨到欧洲各地游历，受到欧洲许多国家的重视甚至聘用. 在他的倡议和奔走下，柏林科学院得以建立，莱布尼茨出任首任院长. 在他的鼓动下，维也纳科学院、彼得堡科学院也先后诞生. 据传说，他曾写信建议中国的康熙皇帝在北京建立科学院. 1700年2月，莱布尼茨当选法国科学院院士.

1698年，汉诺威公爵奥古斯都选帝侯去世，继任公爵对莱布尼茨颇不信任，从此，他在其他王室中也逐渐失宠. 1716年11月14日，莱布尼茨因病谢世，与牛顿一样，莱布尼茨也终身未婚.

2. 莱布尼茨的微积分

与牛顿有很大的不同，莱布尼茨创立微积分的基本思想可以追溯到他早年的对组合数学的研究中. 莱布尼茨在其第一篇数学论文，1666年完成的《论组合的艺术》中研究了平方数序列

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, \cdots$$

的性质. 他发现它的第一阶差为

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

第二阶差则恒等于2

$$2, 2, 2, 2, \cdots$$

莱布尼茨发现，自然数列的第二阶差消失，平方序列的第三阶差消失，等等. 他还注意到，如果原来的序列是从0开始的，那么第一阶差之和就是序列的最后一项. 例如，在平方序列中前5项的第一阶差的和为$1+3+5+7+9=25$，即原序列的第6项，他用x表示序列中项的次序，y表示这一项的值；他用$\mathrm{d}x$表示相邻的序数之差，量$\mathrm{d}x$他经常写作a，此时等于1，$\mathrm{d}y$表示两个相邻值之差. 然后他用*omn*.（拉丁文omnia的缩写）表示和，而且用l代

替 dy，莱布尼茨断定 $omn.\ l=y$. 莱布尼茨得到了 $omn.\ yl=\frac{y^2}{2}$ 的结论，但这只适合 $y=x$ 的情况，如图 3.4. 三角形 ABC 的面积是 yl 的和（$l\to 0$ 时），就是$\frac{y^2}{2}$.

上述的一切成为莱布尼茨积分思想的先导，但距离建立微积分还有很长的路要走. 他必须从一连串离散的值过渡到 dy 和 dx 是 x 的任意函数 y 的增量的情况. 因为他此时仍然局限于数列，而在数列中 x 是项的次序，所以他的 a 或 dx 是 1；这样他可以自由地插入或去掉 a. 当他过渡到任意函数的 dx，dy 时，这个 a 就不再是 1 了.

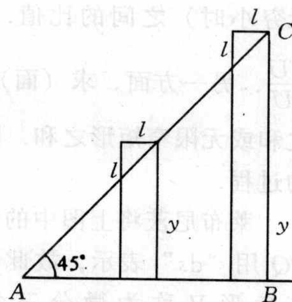


图 3.4

莱布尼茨走上数学生涯在很大程度上是受惠更斯的影响. 1672 年，他从惠更斯那里得到了一道竞赛题：求三角级数列（1，3，6，10，…）倒数的数列之和. 莱布尼茨圆满地解决了这个问题，在初次成功的鼓舞下，他研究数学的兴趣大增. 通过惠更斯的介绍，莱布尼茨研读了卡瓦列利、巴罗、帕斯卡、沃利斯、托里切利等人的著作. 受此启发，他也投身到求曲线的切线、求曲边图形面积这些当时方兴未艾的课题之中.

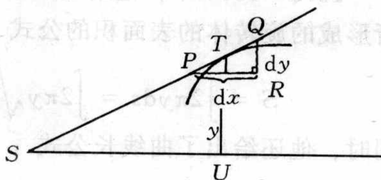


图 3.5

在莱布尼茨所了解的大量其他数学家的工作中，巴罗的特征（或微分）三角思想对他的启发尤其突出. 在此基础上，莱布尼茨于 1673 年建立了自己的由 dx，dy 和 PQ（斜边）构成的特征三角形：两直角边就是任意函数的

$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$；则 PQ 是 P 和 Q 之间的曲线，而且是 T 点的切线的一部分，如图 3.5．T 是曲线 $y=f(x)$ 上之一点，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 分别为横纵坐标的差值．研究这个特征三角形后，莱布尼茨得出这样的结论：一方面，曲线的切线依赖于纵坐标的差值与横坐标的差值（都变成无穷小时）之间的比值．不难证明 $\Delta PQR \approx \Delta STU$，则有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{TU}{SU}$．另一方面，求（面）积依赖于横坐标的无穷小区间的纵坐标之和或无限窄矩形之和．同时，他还意识到这种求和与求差是互逆的过程．

莱布尼茨将上图中的斜边 PQ 用"$\mathrm{d}s$"表示，故此特征三角形又称为微分三角形(differential triangle)，如图 3.6．其中 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$．早在 1673 年，莱布尼茨就利用特征三角形通过积分变换，得到了平面曲线的面积公式，用现代符号表示

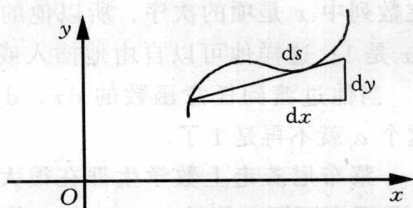


图 3.6

$$S=\frac{1}{2}\int_0^x\left[y(\bar{x})-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\bar{x})\right]\mathrm{d}x.$$

1673—1674 年，他给出了求一曲线 $y=y(x)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的表面积的公式，用现代符号表示

$$S=\int 2\pi y\mathrm{d}s=\int 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

同时，他还给出了曲线长公式

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

在莱布尼茨的众多微积分手稿之中，1675 年 10 月 29 日的手稿显得尤其突出：一方面，他引进了符号"∫"来代替了以往的求

和符号“*omn.*”,[1]“∫”是 Sum（和）的第一个字母“S”的拉长．如此

$$\int l = omn.\, l, \int x = \frac{x^2}{2}, \text{用} \int y\mathrm{d}x \text{ 表示面积}.$$

另一方面，他在手稿中给出了许多重要结果，比如

$$omn.\ xl = x\ omn.\ l - omn.\ omn.\ l,$$

即所谓的分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\ ,$$

以及

$$omn.\ yl = \overline{omn.\ \overline{omn.\ l}\frac{l}{a}},$$

即

$$\frac{y^2}{2} = \int\left(\int \mathrm{d}y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\ .$$

1676 年 11 月，他得出公式

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\text{，}(n \text{ 为有理数，且 } n \neq -1).$$

同时，莱布尼茨还得出下面的结果：对于幂，$\mathrm{d}x^a = x^{a-1}\mathrm{d}x$，若要微分$\sqrt{a+bz+cz^2}$，首先设 $a+bz+cz^2 = x$，微分$\sqrt{x}$，然后再乘以$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$，这就是现在所谓的链式微分法．由此可以看出，对积分和微分的研究是交替进行的．在此前一年，莱布尼茨注意到，面积被微分时必定得到长度，长度被积分时必定得到面积．尽管论证有欠充分，他断定“∫ 运算”（积分，主要是求和）与“d 运算”（微分，主要是导数与求切线）必为互逆的过程．

莱布尼茨在 1675 年末给出了微积分基本定理，即后世所称的牛顿—莱布尼茨公式

[1] 所谓代替并非完全抛弃了 omn.，事实上两种符号都存在于这部手稿之中．

$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a), \int_a^b f\mathrm{d}x = A.$

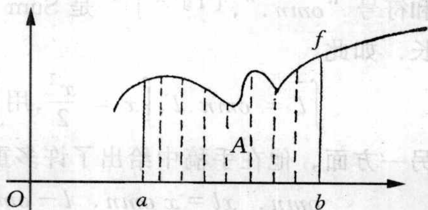


图 3.7

（A 为曲线 f 下的图形的面积，如图 3.7）但当时，他未能给出此定理的证明，证明这个定理几乎耗费了他 17 年的光阴（1693 年给出证明）.

在牛顿和莱布尼茨之前，微分与积分是作为两种数学运算、两类数学问题分别加以研究的．卡瓦列利、巴罗及沃利斯等人在这方面得到了一系列的重要成果，但这些成果都是孤立的．虽然沟通微分与积分的关系也曾进人们的考虑范围，甚至巴罗模模糊糊地感觉到它们似乎是互逆关系，但是终未能有人明确的认识到两者之间的互逆关系．只有牛顿和莱布尼茨（各自独立地）将微分与积分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的直接的联系：微分与积分是互逆的两种运算．而这正是建立微积分学的关键所在．只有确立了这一基本关系，才能在此基础上构建系统的微积分学，并从对各种函数的微分和求积公式中，总结出共同的算法程序，使微积分方法普遍化，发展成用符号表示的微分运算法则.〔1〕

莱布尼茨的第一篇微积分的文章于 1684 年发表在《学艺》杂志上，这是历史上最早公开发表的微分学文献．论文的题目很长：《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》（Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae necfractas, necirrationales quantitates moratur, et singulare pro illis Calculi genus）.

〔1〕孙小礼，张祖贵：《莱布尼茨》，载《世界著名数学家传记上》，北京，科学出版社，1995，P. 583

早在 1677 年下半年，莱布尼茨明确定义 dy 为函数微分，同时给出了 dy 的演算规则：

若 a 为给定常数，则有 $da = 0$，$dax = adx$；

加法和减法：若 $v = z - y + w + x$，则有

$$dv = dv - dy + dw + dx;$$

乘法：若 $y = vx$，则有 $dy = vdx + xdy$；

除法：$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{vdy - ydv}{y^2}$.

在研究曲线的切线问题时，莱布尼茨得出了这样的结果：对于曲线 $y = y(x)$，当 $dy/dx \to \infty$ 时，切线垂直于 x 轴；当 $dy/dx \to 0$ 时，切线平行于 x 轴，当 $dy = dx \neq 0$，切线与 x 轴成 45 度角；当 $dy = 0$，则曲线在此处取得极值：当 $dy < 0$ 变为 $dy = 0$ 后又变为 $dy > 0$，则取得极大值，反之取得极小值. 他还得到曲线的凸凹性变化的条件是 $d^2y = 0$.

随后的时间里，莱布尼茨研究了各种复杂函数的微商即导数. 1686 年，给出了对数和指数函数的微商；1695 年得到微商 $dx^x = x^x(1 + \ln x)dx$ 等.

莱布尼茨的无穷小演算的根据在于一种合乎逻辑的推广，就是把关于普通数列的和的序列与差的序列的简单概念推广到同几何曲线相联系的变量序列的情况. 他把一条曲线想像为具有无穷多个角和无穷多个长度为无穷小的边的一个多边形，其中每一个边与曲线的一条切线相重合，同曲线相联系的基本变量序列是这个多边形的无穷多个顶点的横坐标 x 和纵坐标 y 的序列.〔1〕

相临的两个 x 之差是微分 dx，相临两个 y 之差是微分 dy. 若 dx 和 dy 都不为零，但它们与 x 和 y 的值相比为无穷小，则可忽略不计. 同理，若微分之积非零，$(dx)(dy)$、$(dx)^2$ 和 $(dy)^2$ 与

---

〔1〕C. H. 爱德华著，张鸿林译：《微积分发展史》，北京出版社，1987，P.353.

dx 和 dy 相比都为无穷小，则可忽略不计.

此处，dx 和 dy 都为固定的非零量，这样存在一个与曲线联系的微分 dx 或 dy 的序列，它就是横坐标 x 或 y 序列的差的序列，它的各项是二阶微分

$$d(dx)=ddx=d^2x \text{ 或 } d(dy)=ddy=d^2y.$$

反复取差,就可获得高阶微分 $d(d^{n-1}-x)=d^nx$ 或 $d(d^{n-1}y)=d^ny$.

莱布尼茨还给出了高阶微分的"莱布尼茨法则"：

$$d^n(uv)=\sum_{j=0}^{n}C_n^j(d^ju)\cdot(d^{n-1}v)\left(C_n^j=\frac{n!}{j!(n-j)!}\right).$$

莱布尼茨的第一篇积分论文发表在1686年5月的《教师学报》上，题目为《潜在的几何与不可分量和无限之分析）（De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque Infinitorum），他计算积分实际上就是求原函数. 他在此论文中指出，$\int\sqrt{a^2\pm x^2}dx$ 的结果是超越函数，同年他给出了曲率 ρ 公式：

$$\frac{1}{p}=R=\frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2},$$

其中 R 为曲率半径.

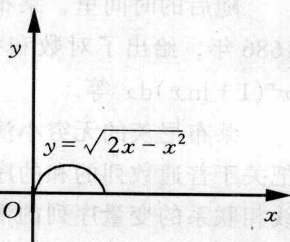


图 3.8

无穷级数从一开始就成为牛顿和莱布尼茨等人微积分工作的重要部分，有时使用无穷级数是为了计算一些特殊的量. 例如，莱布尼茨在求面积过程中，通过无穷级数得到了 π 的一个十分漂亮的表达式，如图 3.8.

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}\left[xy\Big|_0^1+\int_0^1\left(y-\frac{dy}{dx}\cdot x\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1+\int_0^1\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\Big|_0^1-\int_0^1 xd\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\mathrm{d}z \left(z = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \right)$$

$$= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)\mathrm{d}z$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9 + \cdots \right)\Bigg|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.$$

1673 年前后，莱布尼茨独立得到 $\sin x$，$\cos x$ 和 $\mathrm{arctg}x$ 等函数的无穷级数展开式．还得到了圆面积和双曲面积的展开式，他经常利用级数研究超越函数．

微积分创立之后，微分方程立即引起了人们的注意．莱布尼茨称微分方程为特征三角形的两个直角边（$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}x$）的函数．在微分方程研究方面他得到一些独特的结果．

1691 年，他给出了常微分方程的分离变量法，解决了形如

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f(x)g(y)$$

型方程的求解问题．方法是：先写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \frac{g(y)}{y}\mathrm{d}y,$$

然后两边积分．同年，他还得出解一次齐次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方法：

$$令 \quad \frac{y}{x} = z，则 \ y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

从而得到

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z).$$

经过这种变换，原来的一次方程变成了

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z) - z,$$

变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

然后对其两边积分.

在求解微分方程方面，莱布尼茨解决了许多具体问题、弄清了许多超越函数的基本性质，他曾给出非常重要的曳物线方程，也像牛顿那样解决了“最速降线问题”，摆线方程，等等. 莱布尼茨的研究非常广泛，涉及到逻辑学、数学、力学、地质学、法学等等.

莱布尼茨的一生与政治有着千丝万缕的联系，他多次受到欧洲一些王室的雇用，甚至卷入政治斗争，但他一直未停止科学研究. 值得一提的是，他曾从到过中国的传教士白晋那里知道了中国的八卦，他由此认为中国人掌握了二进制.

莱布尼茨是一位通才，在数学上除了微积分、微分方程，他还是二进制的发明人，数理逻辑的奠基人. 除数学外哲学更是他的强项，甚至比数学有过之而无不及. 作为哲学家，莱布尼茨在哲学史上敢与亚里士多德并驾齐驱. 他的研究领域还包括物理学、力学、光学、地质学、化学、生物学、气象学、心理学，在当今的各个学科领域都可以多少留有他的影子.

§3.3 余　波

1. 早期微积分学说的缺陷

在微积分建立之初，连牛顿和莱布尼茨都未能明确理解和严格定义微积分中的某些基本概念，比如说“无穷小”. 在他们定义导数与微分时都有些模糊. 但是幸运的是，暂时的困境并未阻碍牛顿和莱布尼茨的高瞻远瞩，他们大胆地发表了自己的尚不完善的成

果. 但在两人发表他们的学说之初，就遭到了大量的怀疑、批评、指责甚至攻击.

1695年，荷兰物理学家纽文泰特（Bernard Nieuwentijt，1654.8.10—1718.5.30）在其著作《无限小分析》（Analysis infinitorum 1695）中指责牛顿的流数术叙述的“模糊不清”. 但最疯狂的抨击来自英国哲学家伯克雷（G. Berkeley，1685—1753）大主教. 他在1734年发表了小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》(The Analyst，a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician)，“不信神的数学家”是影射曾帮助牛顿出版《自然哲学之数学原理》的哈雷.

伯克雷集中攻击牛顿流数论中关于无限小量的混乱假设. 例如在首末比方法中，为求幂 x^n 的流数，牛顿假设 x 有一个增量 o，并用它去除 x^n 的增量得到

$$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o+\cdots,$$

然后又令 o “消失”，得到 x^n 的流数 nx^{n-1}. 伯克雷指出，这里关于增量 o 的假设前后矛盾，是“分明的狡辩”. 他讥讽道：“这些消失的增量究竟是什么呢？它们既不是有限量，也不是无限小，也不是0，难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗？”《分析学家》的主要矛头是牛顿的流数术，但对莱布尼茨的微积分也竭力非难，认为其中的正确结论，是从错误的原理出发经过“错误的抵消”而获得的.

伯克雷对微积分学说的非难是出于宗教目的，他欲证明流数原理并不比基督教义“构思更清楚”、“推理更明白”. 但他的许多批评是切中要害的，在客观上揭露了早期微积分的逻辑缺陷，刺激了数学家们为建立微积分的严格基础而努力.〔1〕

〔1〕李文林，《数学史教程》：高等教育出版社；施普林格出版社，北京，2000，P.187.

对于微积分中的 dx、dy 和 dy/dx 的最终含义，莱布尼茨本人也是模棱两可．他说 dx 是两个无限接近点的 x 值的差，切线是连接这两点的直线．他虽然把不同阶的无穷小量作出了区别，但有时却未加证明地去掉高阶无穷小量．微分 dx 和 dy 不为 0，但有时却随心所欲地去掉，这种做法怎不令人费解．在微积分发表后，莱布尼茨也遭到不计其数的批评与攻击．

荷兰数学家纽文泰特在其著作《无限小分析》中指责牛顿的同时，也指责莱布尼茨的高阶微分"缺乏根据"，并向莱布尼茨提出一连串的质疑：无穷小量与 0 有何区别？为什么无穷小量的和是有限的量？高阶无穷小是否存在，有何意义？推理过程中为何可以舍弃无穷小量？……

莱布尼茨回击批评者说：所谓"无穷大"与"无穷小"仅仅表示愿要多大就有多大，愿要多小就有多小的量，这是为了证明误差可以小于任何给定的数，换言之，就是没有误差．人们能用这些最终的东西，即无穷大量与无穷小量作为工具，正如在代数里用虚根有极大的好处一样．〔1〕

莱布尼茨的"自圆其说"并不能使批评者满意，他又提出了一个叫做连续性定理的哲学原理："在任何假定的向任何终点的过渡中，允许制定一个普遍的推论，使最后的终点也可以包括进去．"莱布尼茨还说：无穷小不是简单的绝对的零，而是相对的零，这就是说，它是一个消失的量，但仍保持着它那正在消失的特征．但是在另外的场合，他又说他不相信度量中真正的无穷大或真正的无穷小．

事实上，牛顿和莱布尼茨都没能把微积分中的基本概念，即导数与积分搞清楚．就连他们的后继者约翰·伯努利等人也是在懵懂中发展了微积分．尽管人们对微积分众说纷纭，但其魅力和强有力

---

〔1〕 Acta Erud，1695，310～316＝Math Schriften，5，320～328.

的功能终究吸引了人们的目光．微积分严格化社会条件的成熟还需要一个世纪的等待．

2．牛顿的“流数术”与莱布尼茨的“微积分”之比较

牛顿和莱布尼茨是微积分的奠基人，由于两个人不约而同的努力，使得微积分作为一个独立学科建立起来，开辟了数学史的新纪元．两人通过不同的途径得到了相同的结果，可谓殊途同归．那么两人的工作有何异同呢？

他们都是在代数的概念上建立微积分，两人之前，也有人曾致力于微积分的算术化，但终未成功．两人都引入了一套独特的符号系统，这样就使得微积分的概念和运算易于理解，有利于微积分的发展与普及．两人创立微积分的目标是一致的，都是为了解决当时的四大问题——**求速度、曲线的切线、极值以及求面（体）积**．两人也确实达到了目标，求速度、切线和极值归结为微分，求积问题归结为积分，这样四大问题就归结于微积分．

两人的工作差异主要表现在：他们的着眼点不同，牛顿从**物理**或**运动**角度出发，而莱布尼茨则从**哲学**角度出发．前者在求流数时借助于 x 和 y 的无穷小增量，而莱布尼茨则直接采用 x 和 y 的无穷小量（微分）求出它们之间的关系．牛顿注重的是运动学上的速度，而莱布尼茨则注重哲学上的微粒．牛顿看重的是微分，比如求速度、切线和极值，求积可以归结为反微分即积分；而莱布尼茨则不然，他首先考虑的是积分，尽管积分要以反微分的计算获得．两人的工作的差异还表现在牛顿热衷于使用级数，在他的流数术中大量地用级数表示函数．而莱布尼茨则反对这样做，他宁可采用有限形式．

在引进新的符号系统这点上他们是相同的，但相比之下，牛顿的符号系统在先进性上则比莱布尼茨的符号系统逊色三分．莱布尼茨曾绞尽脑汁、煞费苦心地选择富有启示性的符号，而牛顿则未这

样做．这一点决非无关紧要，因为一套优良的符号系统有助于学习者的理解，对于普及这个学科起着举足轻重的作用．在现代的微积分书籍和课本中采用的基本是莱布尼茨的符号系统．

3．“优先权”之争

在微积分的发明上，牛顿与莱布尼茨平分秋色．但是在发明微积分之后不久，发生了一场不该发生的激烈争端．

争端始作俑者是瑞士数学家德迪勒（Nicolas Fatio de Duillire）．1699年他寄给皇家学会一本小册子，在里面他提出“牛顿是微积分的第一发明人”，而莱布尼茨“曾从牛顿那里有所借鉴”“作为第二发明人”．莱布尼茨对此予以反唇相讥，这样一场论战爆发了．

1705年，莱布尼茨在《教师学报》上发表的对牛顿《光学》的匿名评论中间接地批评牛顿在《曲线求积术》中“用流数偷换了莱布尼茨的微积分”．随着争论的发展，皇家学会竟也不甘寂寞开始介入，并于1712年组织了一个专门委员会进行调查．

翌年初，调查委员会公布了著名的《通报》(Commercium Epistolicm)，宣称“确定牛顿为第一发明人……那些将第一发明人的荣誉归于莱布尼茨的人，他们对他与柯林斯和奥尔登堡先生之间的通信一无所知”．现在弄清楚了，这个《通报》竟然是牛顿的手笔，结果掀起了轩然大波．考虑到这个委员会主要由牛顿的朋友哈雷、琼斯（William Jones，1675—1749）、泰勒、棣莫弗（Abraham De Moivre，1667.5.26—1754.11.27）等人组成，莱布尼茨义愤填膺，遂向学会申诉了对他的不公，并于同年7月发表了一份《快报》(Charta Volans，牛顿讥讽其为“飞页”）愤怒地指责牛顿“妄想独吞全部功劳”．《快报》声称，“一位领头数学家”断定牛顿17世纪70年代的发明只是无穷级数而非流数术．这里“领头数学家”指的是约翰·伯努利，他是追随莱布尼茨卷入争论的欧洲大陆国家数学家的主要代表．

这一年，莱布尼茨还发表另一篇文章，题目是《微积分的历史与起源》(History et origo Calculi differentialis)，试图说明自己独立发明了微积分. 随着争论愈演愈烈、甚嚣尘上，一部分态度中立的数学家开始试图息事宁人，但牛顿一直未妥协. 1676 年莱布尼茨去世后，经过法国数学家、物理学家瓦里克农（P. Varignon）再三调停，伯努利首先同意和解. 年老的牛顿也听从瓦里克农的规劝，无意再将争论无休止地进行下去，遂于 1772 年重印《通报》最后发出了和解的信号. 持续了 20 多年的争论就此逐渐平息.

事实上，莱布尼茨从 1684 开始发表微积分学论文. 当牛顿 1687 年在《自然哲学之数学原理》中首次发表流数术时，有过这样的一段评论：10 年前，我给学问渊博的数学家莱布尼茨的信中曾指出：我发现了一种方法，可以求极大值与极小值……这位名人回信说他也发现了类似的方法，并把他的方法给我看了. 他的方法与我的大同小异，除了用语、符号、算式和量的产生方式外，没有实质的区别.

然而 1726 年《原理》的再版中，牛顿却删去了这段话，原因是发生了“优先权”之争. 争执虽然偃旗息鼓了，但是其后遗症却是严重的，18 世纪英国数学开始与欧洲大陆分道扬镳. 英国数学家对牛顿神话般的顶礼膜拜，他们走的是牛顿流数法路子，而欧洲大陆上的数学家推崇的却是莱布尼茨的方法. 由于莱布尼茨采用了一套较牛顿更先进的符号系统，结果是，尽管英国也出现了象泰勒、马克劳林等了不起的数学家和数学成果，但与欧洲大陆比起来就有些相形见绌了. 从 18 世纪中期以后的一个多世纪，在微积分方面取得的成就绝大多数都发生在欧洲大陆上，其中包括微积分基础的严格化、微分方程的发展等等. 英国数学开始走下坡路，直到 19 世纪末才开始改变.

英国人指责莱布尼茨剽窃了牛顿的成果，是因为他于 1676 年访问伦敦期间借阅过牛顿的《分析学》. 后来的材料表明，莱布尼

茨只从牛顿那里得到一些级数方面的东西．现在，有充分的材料证明：牛顿与莱布尼茨各自独立地发现了微积分．就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨，但就发表而言，莱布尼茨则早于牛顿．尽管发生了不愉快，但莱布尼茨和牛顿两个人都未曾怀疑过对方的才能，两人甚至相互崇敬有加．

第四章 一个世纪的进展

微积分在 18 世纪获得了更进一步的发展．在发展过程中，微积分引发了许多学科，这样就出现了一个新的数学领域，即所谓的“数学分析”．它以微积分为基础和出发点，数学从而形成为分析、几何、代数相互独立又相互渗透的新局面．在 17—18 世纪，微积分的创立和发展导致了一些新兴学科的诞生，比如微分方程、复变函数、微分几何以及变分法等等，这个时期数学家的中心任务是投身于这些学科的发展．但是在发展和推广微积分方面，英国数学家和欧洲大陆数学家却走上了不同的道路．

§4.1 微积分在英国

英国的数学家们大都遵循牛顿流数术的理论路线．当时英国的数学家都集中在剑桥、牛津以及爱丁堡等著名大学教授和研究流数术．其中的佼佼者是泰勒、马克劳林、斯特灵以及棣莫弗等人．

1．泰勒的工作

泰勒（图像 15）出生于英格兰米德尔塞克斯（Middlesex）的埃德蒙顿（Edmonton）一个富有的家庭，而且带有点儿贵族血统．

泰勒的家庭可谓书香门第．他的全家，尤其他的父亲多才多艺，经常在家里招待各种艺术家．耳濡目染，这一切对泰勒的一生产生了深远影响．

1701 年，泰勒进入剑桥大学的圣约翰学院，师从梅钦（John Machin， 1680.11.30—1751.6.3）[1] 和基尔（John Keill, 1671.12.1—1721.8.31）[2]．1709 年，他获得法学学士学位，5 年后又获得法学博士学位．1712 年，他被选为英国皇家学会会员，是年进入牛顿与莱布尼茨微积分发明优先权之争仲裁委员会．泰勒曾于 1714 年担任皇家学会第一秘书，此前这一职位由哈雷担任．由于对这个受约束的工作不感兴趣，4 年后，他以健康为由辞去了这个工作．担任皇家学会秘书的几年，是泰勒在数学上最多产的时期．他在两本著作：《正和反的增量法》（Methodus incrementorum directa et inversa）和《直线透视》（Linear perspective）都出版于 1715 年．

泰勒的后半生是在一连串的家庭不幸中度过的，由于第二任妻子之死的沉重打击，泰勒于 1731 年 12 月 29 日在伦敦去世．

泰勒在数学史上能够留下自己的名字是因为，他在 1715 年出版的《正和反的增量法》一书中，给出了他早在三年前就已经得到的一个结果：

$$x(z+v)=x+\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2}+\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^2}+\cdots,$$

其中 v 为独立变量 z 的增量，x 和 z 为流数．泰勒假定 z 随时间均

[1] 英国天文学家、数学家，其主要贡献是利用幂级数 $\mathrm{arctg}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots$ 得到梅钦公式 $\frac{\pi}{4}=4\mathrm{arctg}\frac{1}{5}-\mathrm{arctg}\frac{1}{239}$，并于 1706 年计算出 π 的 100 位准确数值．

[2] 英国物理学家、数学家，牛顿的忠实信徒，他为解释和传播牛顿的学说做了许多工作．

匀变化，所以 z 是常数．用现代符号就是

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots,$$

这就是后世所称的“泰勒定理”或“泰勒表达式”，其中的无穷级数称为“泰勒级数”．但必须注意的是，泰勒给出的表达式与现代的泰勒定理还有些不同，即还缺少余项表达式．

这说明，泰勒获得了微积分学中将函数展开成无穷级数的定理．这条定理可以这样表述：**函数在某点的邻域内的值可以用函数在该点的值及其各阶导数值组成的无穷级数表示出来**．这一定理为微积分的进一步发展提供了一个非常有效的工具．

在给出定理的同时泰勒还给出了证明，然而他的证明却是不严格的．不过这不能完全归咎于泰勒，因为当时微积分的逻辑基础是非常混乱的．但是从他的证明中可以获知，泰勒试图用有限差分和极限来解释牛顿的流数术和莱布尼茨的微分法．但如何从差分过渡到流数，他也甚是懵懂．他即未考虑级数的收敛性，也未得出余项表达式．

实际上，早在 1694 年，约翰·伯努利就已经在《教师学报》上发表了与泰勒定理相似的结果．而且，泰勒似乎对此并非一无所知，但在他的书中并未提及此事．此前已经提到，当时在牛顿与莱布尼茨之间发生了一场关于微积分发明优先权之争，而泰勒与伯努利正分别扮演着两个对立阵营的急先锋的角色．现在，在泰勒与伯努利之间又发生了关于幂级数展开定理发明优先权之争，这可以看作是牛顿和莱布尼茨之争的继续．研究表明，没有足够的证据表明伯努利已经得到了泰勒定理的最终形式，所以发现这个定理的殊荣还是给予了泰勒．

17 世纪末和 18 世纪，插值方法方兴未艾．这是由于当时航海、天文学以及地理学等应用学科的突飞猛进，对三角函数表、对数表以及航海表的精确度提出了更高的要求．

泰勒定理诞生后，并未引起数学家的注意，直到半个世纪后，其在分析上的价值才由法国数学家拉格朗日在研究中所认识．定理的余项表达式也是由拉格朗日在18世纪末给出的，定理的较严格证明则是由另一位法国数学家柯西给出的，不过这已经是100多年以后的事了．

在《正和反的增量法》[1]和以后在《哲学汇刊》(Philosophical Transactions) 发表的文章中，泰勒用他的定理把函数展开成级数，得到了如正弦函数以及对数函数的标准表达式；他还用这个定理求解数值方程；他还得出了微分方程的奇解；建立了一种求解微分方程的方法——主要是对微分方程进行微分．

在数学方面，泰勒还用曲率和曲率半径首次得到了震动弦的最简形式——正规震动的解．像许多数学家一样，泰勒也是一个多面手．除数学外，泰勒的兴趣和才能还有透视理论，1715年出版的《直线透视》成为18世纪透视理论方面影响最深远的一部著作．他还第一个正确解释了光折射的本质．

2．马克劳林等人的工作

泰勒展开式在 $x=0$ 的特殊情形后来被爱丁堡大学的马克劳林（图像16）在讨论无穷级数时重新发现，并用待定系数法予以证明，这就是微积分学中著名的马克劳林级数展开式，用现代符号即为

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots.$$

马克劳林指出：事实上，这个展开式只不过是泰勒展开式的特殊情形．奇怪的是，人们把它看作一个独立的定理，而且把发现它

---

〔1〕这本书不但是微积分发展史上的重要著作，而且建立了一个新的数学分支——有限差分．尽管在此之前已经广泛使用于插值问题，但是在泰勒的努力下它才成为一门学科．因此，泰勒成为有限差分的奠基人．

的荣耀给予了马克劳林.

马克劳林是牛顿的流数理论的重要继承者和维护者，早在1719年访问伦敦时，他曾拜会过牛顿．翌年，在牛顿的许可下出版了有关高阶平面曲线的重要论著《结构几何学》（Geometrical organica）．书中证明了许多牛顿著作中未曾解释的定理，例如一条n次不可约曲线的二重点最多个数是$(n-1)(n-2)/2$等，并引入“亏数”的概念．他的另一名著《流数论》（Treaties of Fluxions，1742）则最早为牛顿流数方法作出了系统的逻辑阐述．马克劳林以熟练的几何方法和穷竭法论证了流数学说，在建立微积分的严密性理论方面作了大胆尝试．尽管囿于几何传统而未获成功，但他的工作对微积分的发展还是起到了很好的促进作用．

马克劳林在代数方面的主要贡献是在1729年创立了用行列式方法求解多个未知数的联立线性方程，这一结果收入其遗作《代数论》（A Treatise of Algebra，1748）中，后来由另一数学家克莱姆(Gabriel Cramer，1704.7.31—1752.1.4）于1750年再次得到．他还研究过垂足曲线问题（1735）和蜂房结构问题（1743），并以有关潮汐的研究成果与丹尼尔·伯努利、欧拉共同荣获1740年巴黎科学院奖金．马克劳林的才能是多方面的，众多创造性成就使他成为18世纪英国最有影响的数学家之一．

英国皇家学会会员（1726）、柏林科学院院士（1748）斯特灵(James Stirling，1692—1770.12.5）是牛顿流数术重要的鼓吹者之一．1730年，他出版了一本重要著作《微分法》（The Methodus differentialis）．书中考察了级数（用现代符号）

$$\lg n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots$$

等价于

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\cdot$$

$$\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right].$$

（其中系数 B_k 是伯努利数）同时，斯特灵还给出了前 5 个系数以及计算后面系数的递推公式．虽然 lg$n$！的级数是发散的，但他只用级数的前几项就计算出 lg1000！等于 2567 加上一个准确到小数点后 10 位的小数．

斯特灵还引入了以其名字命名的级数

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x(x+1)}+\frac{a(a+1)}{x(x+1)(x+2)}+\cdots$$

运用实例

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{(2n-1)2n} \text{ 和 } \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

阐述了使级数快速收敛以加快计算的求和方法；研究了级数的插值，得到了 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 等许多结果．斯特灵的成名作是《牛顿的三次曲线》，其中证明了牛顿关于三次曲线分类等等．

牛顿给英国数学带来的辉煌在马克劳林时代还多少闪耀着一些神韵，可在他之后，英国数学开始归于沉寂．像英吉利海峡隔断了欧洲大陆与英伦三岛一样，牛顿与莱布尼茨之间的争执也隔断了英国与欧洲大陆之间的数学交流．

出于狭隘的民族感情，英国数学家囿于牛顿的流数路线，这样他们就必然无法摆脱牛顿方法的不足之处．与此产生鲜明对比的是，微积分在欧洲大陆上获得了蓬勃发展，呈现出一派欣欣向荣的景象．在此期间，欧洲大陆上可谓人才济济，为微积分的发扬光大作出过突出贡献的数学家不一而足．其中主要是瑞士的伯努利家

族、欧拉；法国的克莱洛、达朗贝尔、拉格朗日，等等. 在微积分发展方面，雅格布·伯努利与约翰·伯努利以及欧拉的工作在欧洲尤为令人瞩目，而欧拉更是其中的佼佼者. 欧洲大陆数学家与英国数学家不同，他们遵循的是莱布尼茨的微积分思想路线.

§4.2　伯努利家族的贡献

1. 伯努利家族简介

雅格布·伯努利（Jakob Bernoulli，1654.12.27—1705.8.16）（图像 17）出生于瑞士巴塞尔（Bassel）一个名门望族，毕业于巴塞尔大学. 1671 年获得艺术硕士学位，为了遵从父命，他不得不于 1676 年又取得了神学硕士学位. 雅格布的父亲希望他去经商，他不顾父亲的强烈反对，自学了数学和天文学.

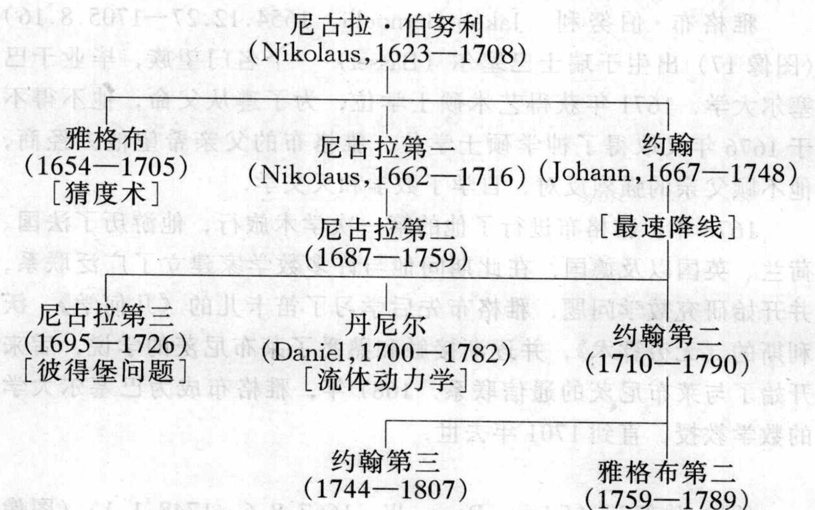
1678 年，雅格布进行了他的第一次学术旅行，他游历了法国、荷兰、英国以及德国. 在此期间他与许多数学家建立了广泛联系，并开始研究数学问题. 雅格布先后学习了笛卡儿的《几何学》、沃利斯的《无穷算术》，并逐渐接触和熟悉了莱布尼茨的学说，后来开始了与莱布尼茨的通信联系. 1687 年，雅格布成为巴塞尔大学的数学教授，直到 1701 年去世.

约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667.8.6—1748.1.1）（图像 18）与他的哥哥雅格布·伯努利有很多相似之处：他也出生在巴塞尔，也未听从父亲希望他从商的要求，也进入巴塞尔大学（1683 年）. 1685 年获得艺术硕士学位，然后他转攻医学. 5 年后获得医

学硕士学位，又过了4年获得医学博士学位.

约翰是在哥哥雅格布的带领下开始学习数学的. 在大学里，约翰偷偷地跟雅格布学习和研究数学. 他们熟悉了莱布尼茨的微积分学说，在莱布尼茨思想的鼓舞下，约翰与微积分结下了不解之缘. 兄弟俩都成为莱布尼茨的朋友，约翰成为莱布尼茨的忠实拥护者.

1705年，约翰接替去世的哥哥继任巴塞尔大学的数学教授，直到1748年去世. 由于约翰的数学贡献，他被欧洲许多国家的科学院选为院士或会员. 雅格布和约翰经常一起研究莱布尼茨的文章并加以润色的同时也对微积分做了大量的新发展，他们成为17世纪继莱布尼茨之后，最先发展微积分的人. 莱布尼茨承认，两兄弟在微积分方面的工作和他一样多[1]. 参阅下面的伯努利家族谱.



[1] 许义夫,《雅格布·伯努利》: 载吴文俊主编《世界著名数学家传记 上》，科学出版社，北京，1995，P.612.

2. 雅格布的数学成就

雅格布在《教师学报》上发表了大量论文，并于 1690 年在《学艺》上提出了“悬链线（catenary）问题”[1]. 1691 和 1692 年间，他又改变条件解决了更复杂更一般的悬链线问题[2]. 对一组端点条件，他得到的曲线方程为

$$\mathrm{d}y=\frac{(x^2+ab)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}},$$

关于悬链线问题的研究在 1695 年被应用到悬置桥梁的建设中.

1694 年，雅格布出版了一本论文集《微分学方法，论反切线法》(Specimen caculi differentialis; de methodo tangentium inversa). 在这部作品中，雅格布用深入浅出的语言对微分原理加以诠释，对莱布尼茨微积分学说的广泛传播起到了举足轻重的作用.

雅格布在微分方程方面有很深的造诣，他是用微积分求一阶常微分方程分析解的先行者之一. 1690 年 5 月，雅格布在《教师学报》上发表了关于等时问题的解答. 问题是这样的：求一曲线，使得一单摆沿着它做一次完全的振动，不管单摆经过的弧有多长都取相等的时间. 他首先得到一个微分方程

$$\mathrm{d}y\sqrt{b^2y-a^3}=\mathrm{d}x\sqrt{a^3},$$

然后两边积分就得到摆线方程

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=\mathrm{d}x\sqrt{a^3}.$$

“极坐标”的概念最早是由雅格布于 1691 年在《教师学报》上发表的文章中引进的. 以前用直角坐标不便表示的曲线方程，此后可以很容易地表示. 3 年后，还是在《教师学报》上，雅格布提出

---

〔1〕一根柔软而不能伸长的绳子，自由悬挂于两固定点，求这绳所形成的曲线.

〔2〕悬挂的绳为变密度、非弹性软绳、等厚度的弹性绳.

了所谓的“伯努利双纽线”（lemniscate of Bernoulli）：设 F_1，F_2 为平面上两点，且 $F_1F_2=2a$ （$a>0$），若平面上的动点 p 满足

$$pF_1 \cdot pF_2 = b^2 \text{（}b\text{ 为正常数）},$$

则 p 点的轨迹称为卡西尼（Cassini）卵形线. 当 $a=b$ 时则得到双纽线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

用极坐标表示为

$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta .$$

雅格布深入地研究了双纽线的性质，并得到许多重要结果. 双纽线所围成的面积为 a^2；雅格布在求双纽线弧长时，得到弧长积分

$$s=\int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}\mathrm{d}r.$$

1695 年，雅格布在《学艺》上提出了求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$$

之问题. 此方程后世称之为“伯努利方程”. 雅格布还研究了船帆在风力下的形状问题，而且导出了一个二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^3.$$

3. 约翰的数学成就

在发展微积分方面，约翰所做的工作较其兄尤有过之而无不及. 函数概念在微积分学中占有特殊位置，但即使在牛顿、莱布尼茨时代，函数也是众说纷纭没有确切的定义. 1698 年，约翰从分析的角度提出了函数概念：“由变量 x 和常数所构成的式子叫做 x 的函数”，并用 X 或 ξ 表示，20 年后又改用 Φx 表示 x 的函数[1].

---

〔1〕 1734 年，欧拉引进函数符号 $f(x)$.

在数学分析中,有一种把有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$化为部分分式再进行积分的方法,其中$P(x)$和$Q(x)$都是x的多项式,这种方法是约翰得到的. 1699年,他在《教师学报》上发表了用变量替换来计算积分

$$\int \frac{a^2}{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

的方法.通过变换$x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$,就能把原积分化为$\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$形式的积分.三年后,约翰发现一个事实:

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right),$$

通过这样分解,积分就可迎刃而解. 对于有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$,如果$P(x)$的次数高于$Q(x)$的次数,则先做除法得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

其中$T(x)$为多项式,$\frac{r(x)}{Q(x)}$为真分式. 在此,约翰首次提出了分解$\frac{r(x)}{Q(x)}$的方法

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x+l} + \frac{b}{x+m} + \frac{c}{x+n} + \cdots,$$

其中,a,b,c以及l,m,n等皆为常数. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{r(x)\mathrm{d}x}{Q(x)} &= \int \frac{a\mathrm{d}x}{x+l} + \int \frac{b\mathrm{d}x}{x+m} + \int \frac{c\mathrm{d}x}{x+n} + \cdots \\ &= a\ln(x+l) + b\ln(x+m) + c\ln(x+n) + \cdots \\ &= \ln[(x+l)^a \cdot (x+m)^b \cdot (x+n)^c + \cdots].\end{aligned}$$

这种积分方法是约翰的重要贡献.

约翰还有另一项突出成就,就是现在所谓的“洛比达法则”——通过把函数之比的极限转化为所给函数导数之比的极限以

消除 0/0 型或∞/∞型的不定性的一个法则：对于在数轴上点 a 的一个去心右邻域中定义的实值函数$f(x)$和 $g(x)$的情形，洛比达法则具有形式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对于 0/0 不定型即

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

和∞/∞不定型

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

这两种情形，洛比达法则在下述条件下都成立：$f(x)$和 $g(x)$在某个区间(a,b)内可微；对于所有点 $x\in(a,b,)$，$g'(x)\neq0$，则存在导数之比的有限或无穷极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在上述条件下

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

存在，且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

成立．对于左侧极限和双侧极限的情形，还有对于 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$的情形，在做出一些适当的修改后，上述论断仍成立．在实际应用这个法则求函数之比的极限时，有时需要使用这个法则若干次．

事实上，这个法则是约翰在 1694 年给其学生、法国数学家洛比达（Guillaume Franc ois Antoine de L'Hospital 或 L'Hôspital，1661—1704.2.2）的信中告诉他的．2 年后，洛比达在其编写的教材《阐明曲线的无穷小分析》（Analyse desinfiniment petits pour

L'intelligence des lignes courbes)[1]中引入了这个法则．结果人们张冠李戴地把这个法则称为“洛比达法则”．

约翰在 1742 年出版了他的代表作《积分学教程》（Lections mathematies de method integralium），书中汇集了他在微积分方面的研究成果．这部著作是微积分发展史上的一本重要著作，为微积分的发展与普及起到了积极的作用．

微积分的重要分支——变分法（这个名词是后来的拉格朗日和欧拉确定使用的）的肇始可以追溯到约翰提出的最速降线问题[2]，约翰、雅格布以及牛顿、莱布尼茨都给出了答案．用现代符号表示，最速降线问题相当于求函数$f(x)$，使表示质点从$A(x_1, y_1)$到$B(x_2, y_2)$下降的积分

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}\mathrm{d}x$$

取最小值，其中 g 为重力加速度，α 是与初始坐标及速度有关的常数（$\alpha = y_1 - v_1/2g^2$，v_1 为初始速度）．

在数学家们致力于寻找最速降线问题答案的同时，等周问题（求具有给定弧长的曲线，使其所围面积最大，属于带附加条件的变分问题）和测地线等问题的出现标志着变分法的诞生．

变分法处理的是一个全新的课题：求变量

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\mathrm{d}x$$

的极大值或极小值，这个变量（积分）与通常函数有本质区别，即他的值依赖于未知函数而不是未知实数．此后，欧拉与拉格朗日等人在寻求一般方法方面取得重大突破．

---

〔1〕书中由一组定义和公理出发，对变量、无穷小量、切线和微分等概念做了系统阐述，此书是世界上第一本系统的微积分学教科书．由于这本书的影响，“无穷小分析”或“分析”便成了微积分的同意词．

〔2〕参阅本书第三章第一节牛顿事迹．

在约翰之后，他的学生欧拉崛起为后起之秀．欧拉继承了约翰的衣钵，做出了超过其老师的辉煌业绩，成为18世纪数学界的核心人物，可谓青出于蓝而胜于蓝．

4．丹尼尔的数学成就

约翰的儿子丹尼尔（1700—1782）子继父业，并且年少成名，日后也成为一位出色的数学家，年仅25岁就成为彼得堡科学院数学教授．丹尼尔在把微积分算法推广到多元函数而建立偏导数理论和多重积分理论方面做出过突出业绩．比如，1720年，丹尼尔证明了，$z=f(x,y)$在一定条件下有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

即对x和y求偏导数其结果与求导顺序无关．13年后，他的好友欧拉也证明了这个事实．

达朗贝尔和欧拉关于弦振动理论的研究与争论深深地影响了丹尼尔，丹尼尔并于1753年发表了《弦振动问题新思考》．他假定，所有可能的初始曲线都可表示为正弦级数，从而弦振动问题所有可能的解都是正弦周期模式的迭加：

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

但丹尼尔的做法与达朗贝尔和欧拉的想法相悖，由此卷入了一场旷日持久的争论．

丹尼尔的研究领域十分广泛，对当时数学和物理学研究的前沿问题都颇有造诣．他把高超的数学技艺广泛地应用到物理学当中，他在物理学方面的业绩甚至超过数学．丹尼尔在物理学上的成就以流体力学最为令人瞩目．1738年，他的名著《流体动力学》(Hydrodynamica)出版，此书的出版标志着“流体力学”作为一门学科的诞生，丹尼尔成为流体力学的鼻祖．

丹尼尔得到揭示流体压强、密度及流速三者之间关系的“伯努利方程”. 设一个平放的水管道，管道内壁的压力为 P，接通一个充水的非常宽的容器，让水从管道以速度 v 流出，如果 z 为容器中水表面到管道口的距离，他得到方程

$$P + z + v^2 = C.$$

其中 C 为常数. 由于丹尼尔特定的测量方法，这个常数有其特定的数值. 对于密度均匀的水沿着高度为 h 有变化的管道中的定常流的伯努利方程为

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{常数},$$

这里 v 为水流速度，P 为大气压力，ρ 为水的密度，gh 为重力势能. 伯努利方程可以由无旋的、无粘性的流体定常流运动时的欧拉运动方程（Euler equations of motion）

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho X_i$$

（其中 t 是时间，ρ 是流体密度，P 是压力，X_i 是每单位质量的体积力的第 i 个分量，u_i 是 x_i 方向上速度分量，$i = 1, 2, 3$. 这里 x_i 是笛卡儿坐标，在上面的方程中，重复指标表示求和）沿任意曲线积分得出. 伯努利方程不仅对液体的定常流的运动是成立的，而且对于在高压下自小孔喷出的气体也是成立的. 丹尼尔还提出了“流体由于速度增大，而使压力减小”的观点〔1〕.

〔1〕 此理论是现代喷气式飞机升空的原理.

§4.3 "分析的化身"欧拉

18世纪，微积分的最大进步是由瑞士数学家欧拉做出的.

1. 欧拉生平

1707年4月5日，欧拉（Leonard Euler，1707.4.5—1783.9.18）（图像19）出生在瑞士巴塞尔（Bassel）的一个牧师家庭. 翌年，欧拉一家迁到巴塞尔附近的一个名叫里亨（Riehen）的村庄，在这个幽静、美丽的小村庄里欧拉度过了他的童年时代. 欧拉后来走上了数学之路与其父亲的影响不无关系，因为他的父亲就很喜欢数学，并对欧拉进行了数学及其他方面的启蒙教育. 欧拉的双亲希望他将来能够出人头地，于是把他送到外祖母家，并在那里进入一个文科中学，以期欧拉获得良好的学校教育. 但这个学校并不教授数学，欧拉于是跟一位业余数学家学习数学. 聪明勤奋的小欧拉刻苦钻研了鲁道夫（C. Rudolf）1553年的《代数学》（Algebra）.

1720年秋，年仅13岁的欧拉进入巴塞尔大学文科，成为约翰·伯努利的忠实听众，而且成为约翰的两个儿子尼古拉第二和丹尼尔的莫逆之交. 2年后的夏天，欧拉获得巴塞尔大学的学士学位. 次年，欧拉又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位. 1725年，欧拉开始了他的数学生涯. 两年后，他研究的弹道问题与船桅的最佳布置问题，成为这一年巴黎科学院的有奖征文课题，并最终获得荣誉提名.

当时，俄国新组建的圣彼得堡科学院正求贤若渴，百业待兴.

1725 年秋天，尼古拉第二和丹尼尔应聘前往俄国，并向圣彼得堡科学院极力推荐欧拉. 他们的努力有了回音，次年，欧拉收到了来自圣彼得堡科学院的聘书. 安土重迁的欧拉在向巴塞尔大学求职未果的情况下，遂于 1727 年抵达圣彼得堡，开始了他的新生活.

当时，在圣彼得堡科学院聚集了一大批杰出的科学家，其中有数学家丹尼尔，哥德巴赫（Christian Goldbach，1690.3.18—1764.11.20）；力学家赫尔曼（J. Hermann）等人. 欧拉与他们的个人友谊以及共同的科学追求，使得彼此配合默契，欧拉在此期间还结婚生子. 此时才华横溢的欧拉，研究可谓如鱼得水，生活可谓称心如意.

既要搞数学研究，又要在科学院的附属大学中讲课；既要负责科学院的各种事务性工作，又要完成俄国政府指派的各项攻关任务，此时的欧拉是繁忙而充实的. 在圣彼得堡科学院的头 14 年里，欧拉以不可思议的效率在分析学、数论、力学等领域做出了辉煌的成果. 这一切为他赢得了名望. 由于劳累过度，欧拉在 1738 年的一场疾病后右目失明. 但不幸并未能击跨顽强的欧拉，他仍然一如既往地、全身心地投入到数学研究中.

1740 年下半年，俄国的政治形式急转直下、动荡不安. 欧拉与科学院当局又产生龃龉. 恰好是年夏，新登基的普鲁士国王腓特列二世（Friedrich Ⅱ，1712—1786，1740—1786 在位，史称腓特列大帝）决心重振柏林科学院，于是为了自己的科学事业，欧拉只好另谋高就，并于翌年 7 月抵达柏林.

在柏林科学院，欧拉曾戴过多种头衔. 一方面要负责科学院的各项行政事务，另一方面还要担任政府顾问，还要解决腓特烈二世提出的军事难题. 在欧拉的努力下，科学院的各项事业蓬勃发展，蒸蒸日上.

在柏林期间，欧拉仍然保留着彼得堡科学院院士并为彼得堡科学院的人才培养、学术交流付出了不懈的努力. 同时，欧拉还当选

为许多国家的学会会员或科学院院士．在柏林，欧拉的科学研究达到了巅峰．期间，欧拉的研究领域包括天文学、力学、光学、电磁学、火炮和弹道学以及航海等许多领域，并完成了大约 380 篇（部）论著，其中 275 种获得出版．

1759 年后，欧拉与腓特烈二世开始产生嫌隙，甚至后来发生严重的冲突而一发而不可收拾．又，俄国女皇卡捷琳娜二世（Catherine Ⅱ，1762—1796 在位）一直希望欧拉重返圣彼得堡，于是他在 1766 年携家人回到阔别 25 年的俄国．

刚回到圣彼得堡时，欧拉的工作和生活是称心如意的，但是不久灾难却接踵而至．先是一场疾病使欧拉的左眼几乎完全失明，1771 年双眼完全失明．是年除了欧拉本人和他的手稿幸免于难外，他的住所和财产全都在一场大火后荡然无存．正所谓祸不单行，2 年后，欧拉夫人与世长辞．

尽管遭受一系列的不幸和沉重打击，欧拉仍然屹立没有倒下．欧拉的科学活动丝毫没有减少．欧拉的记忆力和心算能力是罕见的．心算不仅限于简单的运算，高等数学同样可以用心去算．欧拉在完全失明前，还能朦胧地看到一些东西，他抓紧这最后的时刻，在一块大黑板上写下他发现的公式，然后口述其内容，由他的学生特别是他的长子约翰（Johann Albrecht Euler，1734—1800，也是数学家和物理学家）笔录．在失明后的 17 年里，欧拉还解决了许多分析问题，当代人把欧拉誉为“分析的化身”（Analysis incarnate）．

法国天文、物理学家阿拉戈（D．F．Arago，1786—1853）赞美说：“欧拉计算好像一点也不费力，正和人呼吸空气，或者老鹰乘风飞翔一样．”这个时期，有一大批合作者围绕在欧拉周围，这使他的工作锦上添花．欧拉是历史上著作最多的数学家，因为欧拉的书文笔流畅、深入浅出受到欧洲各国的热烈欢迎．

欧拉孜孜不倦的研究精神一直保持到生命的最后一刻．1783

年 9 月 18 日下午，欧拉为了庆祝他计算气球上升定律的成功，在家里宴请宾朋．那时天王星刚刚发现不久，欧拉写出计算天王星轨道的要领，还和他的孙子逗笑．喝完茶后，疾病忽然发作，烟斗从手中滑落下来，口中喃喃道："我要死了．"随即失去知觉，当日晚上与世长辞，享年 76 岁．在圣彼得堡科学院和巴黎科学院举行的纪念欧拉的追悼大会上，孔多塞（Marie Jean-Antoine-Nicolas-Caritat，Marquis de Condorcet，1743.9.17—1794.3.27）在悼词的末尾意味深长地说："欧拉停止了生命，也停止了计算．"

2．欧拉的数学功绩

在欧拉所有的数学工作中，首屈一指的应是对分析学的研究，这与当时的时代潮流有关．微积分正处在生机勃勃的发展时期，自然科学的发展也对微积分提出了更高的要求．再者，约翰·伯努利是欧拉的老师，继承老师的衣钵也算是顺理成章的事．在微积分学方面欧拉所做的工作包括：首先，欧拉把从伯努利家族继承下来的莱布尼茨学派的微积分学说的内容进行整理，为 19 世纪的数学发展奠定了基础；把微积分学发展到复数范围；他成为微分方程、变分法、椭圆函数论等方面的先行者；欧拉还引进了许多一直使用至今的数学符号．

欧拉的三本书《无穷小分析引论》（Introductio in Anclysin infinitorum，1748）、《微分学》（Institutionis Calculi differentialis，1755）和《积分学》（Institutiones Calculi integralis，共三卷，1768—1770）成为微积分发展史上里程碑式的著作，被当时欧洲微积分学习者奉为圭臬．在这两本书中，欧拉详尽系统地解说了当时的微积分方法．

在《微分学》一书中，欧拉给出了大量初等函数的微分，推导过程如下：

（1）积的微分法则：

$$d(pq)=(p+dp)(q+dq)-pq$$
$$=pdq+qdp+dpdq$$
$$=pdq+qdp;$$

(2) 商的微分法则：首先做级数展开

$$\frac{1}{q+dq}=\frac{1}{q}\left(1-\frac{dq}{q}+\frac{dq^2}{q^2}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{q}-\frac{dq}{q^2}+\frac{dq^2}{q^3}-\cdots$$
$$=\frac{1}{q}-\frac{dq}{q^2}.$$

则有

$$d\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+dp}{q+dq}-\frac{p}{q}$$
$$=(p+dq)\left(\frac{1}{q}-\frac{dq}{q^2}\right)-\frac{p}{q}$$
$$=\frac{dp}{q}-\frac{pdq}{q^2}-\frac{dpdq}{q^2}$$
$$=\frac{qdp-pdq}{q};$$

(3) 对数的微分法则：

$$d(\log x)=\log(x+dx)-\log x$$
$$=\log\left(\frac{x+dx}{x}\right)$$
$$=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\cdots \text{〔1〕}$$
$$=\frac{dx}{x};$$

(4) 底为 e 的指数函数的微分：

$$d(e^x)=e^{x+dx}-e^x$$

---

〔1〕此前，欧拉已经得到了级数展开式：$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

$$= e^x (e^{dx} - 1)$$

$$= e^x \left(dx + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \cdots \right)$$

$$= e^x dx;$$

（5）$y = p^q$，p 和 q 为 x 的函数时，求 y 的微分：

$$y + dy = (p + dp)^{q + dq},$$

二项展开得

$$dy = p^q (p^{dq} - 1) + (q + dq) p^{q + dq - 1} dp$$

利用指数函数展开式展开 $p^{dq} - 1$，得

$$p^{dq} - 1 = (\log p) dq.$$

代入上式得到

$$dp^q = p^q (\log p) dq + q p^{q-1} dp.$$

欧拉还得到了三角函数和反三角函数的微分：

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = d\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{1}{1 + x^2}$$

……

1734 年，欧拉在一篇论文中证明，如果 $z = f(x, y)$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

事实上，早在 13 年前尼古拉·伯努利已经得到这个结果.

2 年后，他又证明了关于齐次函数的定理：若 z 是 x 和 y 的 n 次函数，则

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

他还研究了函数 $f(x)$ 和 $f(x,y)$ 的极值问题，并得到许多重要结果.

欧拉在第一卷《积分学》中，创造了包括“欧拉代换”在内的许多新方法并计算了大量艰深的定积分. 欧拉还得到了 B- 函数和 Γ- 函数的许多性质，例如

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

其中

$$B(m,n)=\int_0^1(1-x)^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma(n+1)=n!=\int_0^1(-\log x)^n\mathrm{d}x=\int^{\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x,$$

这两个函数在欧拉的《无穷小分析》中都有论述. 事实上，早在1730年，欧拉给德国数学家哥德巴赫的信中已经发现了它们.

1770年，他对二重积分有了明确的概念，还给出了用累次积分计算二重积分的程序. 事实上，早在1748年，欧拉就已经用累次积分算出了：表示一厚度为 δc 的椭圆薄片对其中心正上方距离为 c 一质点的引力的重积分，即

$$\delta c\iint\frac{c\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}},$$

积分区域是由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

围成的.

《微分学》和《积分学》是微积分由以几何为基础变为以算术和代数为基础的重要标志，在《积分学》这本书中，还包含了欧拉研究微分方程理论得到的许多发现.

微分方程是随着微积分一起发展起来的，数学家解决微分方程走的是一条从特殊到一般的道路. 早在1691年，莱布尼茨就用分离变量法解决了形如

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f(x)g(y)$$

的方程. 5 年后，他又用变量替换 $z=y^{1-n}$，将方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n$$

转化为关于 z 和 z' 的线性方程，如上的方程现称“伯努利方程”.

欧拉对微分方程的研究发轫于 18 世纪 30 年代，欧拉（1734—1735）和克莱罗（1739—1740）先后分别独立提出了解决一阶常微分方程

$$M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$$

的“积分因子法”：将方程乘以一个称为“积分因子”的量，使其化为“恰当方程”. 所谓的恰当方程是指方程左端 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$ 恰是某个函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

欧拉和克莱罗都给出了方程是恰当的条件：

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

同时指出，如果方程是恰当的，则它可以积分. 到 1740 年前后，几乎所有求解一阶方程的初等方法都已获得.

在常微分方程研究方面，欧拉的主要研究方向是二阶方程. 在 1743 年的文章中，用代换 $y=e^{kx}$ 给出了任意阶常系数线性齐次方程的古典解法，并最早引入了“通解”和“特解”的术语. 对于 n 阶常系数微分方程

$$Ay+B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\cdots+O\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=0,$$

利用指数代换 $y=e^{\kappa x}$（κ 为常数）得到所谓的特征方程

$$A+B\kappa+C\kappa^2+\cdots+O\kappa^n=0$$

当 κ 是特征方程的一个实单根时，则 $ae^{\kappa x}$ 是原微分方程的一个特解. 当 κ 是特征方程的重根时，用代换 $y=e^{\kappa x}$ 可求得

$$y=e^{\kappa x}\ (\alpha_1+\alpha_2x+\cdots+\alpha_px^{p-1})$$

为包含 p 个任意常数的解.

10年后，欧拉又发表了常系数线性非齐次方程的古典解法，方法是逐次降阶. 1768 年，欧拉在其有关月球运行理论的著作中，创立了广泛用于求带有初值条件 $x=x_0$，$y=y_0$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

的近似解的方法，翌年又把它推广到二阶方程. 这种方法现在称为"欧拉折线法".

1747 年，达朗贝尔首次给出了弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

其中 a 为常数，与弦的密度和张力有关，得到形如两个任意函数之和的解：

$$y(t,x)=\frac{1}{2}\Phi(at+x)+\frac{1}{2}\Psi(at-x).$$

欧拉进一步研究了达朗贝尔的方法，并在允许什么样的函数可以作为初始曲线，因而也作为偏微分方程的解的问题上与达朗贝尔有着截然不同的想法. 1749 年，欧拉发表了一篇题目为《论弦的振动》的论文，引入了初始形状为正弦级数

$$y(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

的特解

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

于是，这两位数学家和丹尼尔·伯努利以及拉格朗日等人都卷入了这场延续了半个多世纪的激烈论战，直到傅立叶 1822 年出版《热的解析理论》(The analytique de la chaleur) 才偃旗息鼓. 期间，欧拉把自己的特征线法发展得更完善了. 在欧拉 1752 年关于流体

运动的论文中，出现了所谓的位势方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

1734 年，欧拉推广了所谓的最速降落问题，并开始钻研这种问题的普遍解法. 1744 年，欧拉的著作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》（Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprictate gaudentes）出版，这本书是变分法诞生的标志. 书中总结了欧拉在 18 世纪 30 和 40 年代初的一些成果. 欧拉将积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

取极值的问题看作是求函数

$$W_n(y_0,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k,y_k,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)\Delta x$$

的通常极值当 $n\to\infty$ 时的极限情形（$x_k=a+k\Delta x,\Delta x=\frac{b-a}{n},k=0,1,\cdots,n$）. 从而获得，使积分 J 达到极值的函数$y(x)$所要满足的常微分方程

$$f_y-f_{y'x}-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y''=0$$

及大量相关的应用例子. 这个二阶常微分方程以欧拉的名字命名，迄今仍是变分法的基本方程. 在这本书出版的同一年，在研究振动问题时，欧拉得到了积分

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}}.$$

这种既不能用代数函数，也不能用通常的初等超越函数来表示的积分，后来成为“椭圆积分”的一部分.

欧拉在分析方面的研究可谓包罗万象，而且成为很多分支的重要奠基人（或之一），微分几何就是这种分支之一. 早在 1736 年，欧拉就引进了以曲线弧长作为曲线上点的坐标并给出曲线的参数

表示：

$$x=x(s),y=y(s),z=z(s).$$

欧拉给出了曲率的定义，并推导出空间曲线任一点曲率半径的解析表达式

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s^2}{\sqrt{(\mathrm{d}^2x)^2+(\mathrm{d}^2y)^2+(\mathrm{d}^2z)^2}}.$$

欧拉的曲率概念是对克莱罗引进的空间曲线的两个曲率之一的标准化．欧拉于 1760 年出版的关于曲面论的经典著作《关于曲面上曲线的研究》（Recherches surla courbure des surfaces）被公认为微分几何史上的一个里程碑．欧拉在其中把曲面表示为 $z=f(x,y)$，并引进了相当于

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$$

的标准符号．除了正确地建立了曲面的曲率概念，而且还引进了法曲率（法截线的曲率）和主曲率（所有法截线的最大和最小曲率），并得到了法曲率的欧拉公式 $\chi=\chi_1\cos^2\alpha+\chi_2\sin^2\alpha$（$\chi_1$，$\chi_2$ 是主曲率，α 是一法截面与主曲率所在法截面的交角）．

欧拉对函数概念的深化，是他对分析学发展作出的一项重大贡献．在《无穷分析引论》中，欧拉彻底地研究了函数概念问题：首先他继承了他的老师约翰·伯努利的函数概念，即把函数定义为由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表达式．此后欧拉指出，函数之间的原则性区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法不同．实际上，欧拉是把函数当作对应值加以讨论的．后来．欧拉在 1755 年的《微分学原理》一书中给函数下了如下的新定义：如果某些量如此依赖于另一些量：当后者变化时它也变化，则称前者为后者的函数．

欧拉时代，微积分的严格逻辑基础尚未建立，对于无穷小问题欧拉也不甚了了．在说明微积分学中略去高阶无穷小的理由时，其

论点也不确切．他认为在 $dx \pm d^2x$ 中，无穷小量 d^2x 在 dx 消失之前消失．

就数学而言，欧拉的研究范围含盖了当时或古老或新兴的大量学科．比如数论、代数、无穷级数、单复变函数、分析学、微分方程、变分法、（微分）几何、图论以及拓扑学，等等．欧拉在《无穷分析议论》中给出了著名的表达式

$$e^z = \lim_{i \to \infty}\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i.$$

欧拉对“格尼斯堡七桥”问题的深入研究，产生了一门新的学科——图论．在拓扑学中，他得到了以其名字命名的“欧拉示性数”

$$2 = V - E + F.$$

其中，V，E 和 F 分别表示闭的凸多面体的顶点数、棱数和面数[1]．欧拉示性数和及由法国数学家、物理学家、天体力学家庞加莱提出的在多维复形中的推广是现代拓扑学的主要不变量之一．欧拉把微积分和微分方程广泛地应用到一般力学、流体力学、天文学以及物理学．

欧拉的数学贡献还在于，他在其著作中引入了许多简单明了的符号：$f(x)$表示函数；用 e 代表自然对数的底；Δy，$\Delta^2 y\cdots$表示有限差分；用 $\sum$ 表示求和；i 表示虚数单位$\sqrt{-1}$，等等．

欧拉生前共发表了 560 多篇（部）著作与论文，身后还留下大量遗稿．因此，欧拉成为历史上最多产的数学家．直到他去世 80 年后的 1862 年，圣彼得堡科学院院报上还在刊登欧拉的遗作．需要说明的是，欧拉还有许多手稿在 1771 年的圣彼得堡的大火中付之一炬、化为灰烬．鉴于欧拉坚忍不拔的意志、孜孜不倦的精神以及无与伦比的数学贡献，数学史家把阿基米德、牛顿、高斯和欧拉

〔1〕 100 年之后发现，事实上笛卡儿早就知道这个性质，但似乎只有欧拉才认识到它的重要意义．

并称为“数学四杰”. 数学家纽曼（J. R. Newman）称欧拉为“数学英雄”.

§4.4 法国学派

除了瑞士的伯努利家族和欧拉，在18世纪为微积分的推进及应用作出了卓越贡献的数学家中，首当其冲的是法国数学家，其中的代表人物有克莱罗、达朗贝尔、拉格朗日等人.

1. 克莱罗与达朗贝尔

法国数学家克莱罗（Alexis - Claude Clairaut，1713.5.7—1765.5.17）（图像20）生于巴黎卒于巴黎. 他在理解和掌握数学知识方面颇有天赋，12岁就开始研究曲线问题，16岁撰写专著《关于双重曲率曲线的研究》. 18岁就当选为法国科学院有史以来最年轻的院士，随后成为多个科学院（或学会）的外籍院士（或会员），并与欧拉和约翰·伯努利等人长期交往.

克莱罗将数学知识广泛地应用到天文学、光学和测量学等许多领域. 1774年，他在《科学院论文集》（Memoires de l'Academiedes Sciences）上提出著名的“克莱罗微分方程”，即

$$y = xy' + f(y').$$

1739年，为解决形如

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

的一类方程创立“积分因子学说”，并于1739年发表在《积分学的一般研究》（Recherches Génèrales sur le Calcul Itégral）上.

此外克莱罗还是空间曲线理论的开创者，向微分几何的建立迈

出了重要一步. 1731 年，年仅 18 岁的他发表了《关于双重曲率曲线的研究》(Recherche sur les courbes a double courbure). 他通过在两个垂直平面上的投影来研究空间曲线，首先提出了空间曲线有两个曲率的想法，等等.

达朗贝尔（Jean Le Rond D' Alembert，1717.11.17—1783.10.29）（图像 21）出生于巴黎，是一个贵妇的私生子. 刚出生不久即被遗弃在巴黎的圣让勒隆（Saint Jean le Rond）（其教名由此得来），由一对贫苦的玻璃匠夫妇收养，其姓达朗贝尔是他长大后自己起的. 达朗贝尔早年学习法律和医学，后转向自然科学，尤其是对数学特别感兴趣.

达朗贝尔未接受过正规的大学教育，完全靠自学掌握了牛顿等著名数理学家的著作. 1739 年，他在巴黎科学院宣读了第一篇论文. 在随后的两年里，达朗贝尔又陆续向科学院提交了 5 篇有关微分方程的积分方法和物体在介质内的阻尼运动的论文. 1741 年，达朗贝尔进入科学院任天文学助理院士，13 年后成为终身院士. 此后，他被欧洲许多国家聘为外籍院士.

达朗贝尔一生出版了许多论文和专著，研究领域涉及数学、力学以及天文学等等，出版于 1743 年的《动力学》（Traite de dynamique）成为力学史上的经典著作. 1750 年后，数理研究工作告一段落，达朗贝尔担任起宣传启蒙思想的《科学、艺术和工艺百科全书》的副主编，他为《百科全书》所写的长篇序言成为启蒙运动的主要文件，他自己成为法国启蒙运动的领导者之一.

达朗贝尔不但是一位成绩卓著的高产数学家，而且是青年数学家的良师益友. 著名数学家拉格朗日和拉普拉斯在青年时代都曾得到他的热情激励和悉心指导. 达朗贝尔的晚年在不如意中度过并于 1783 年 10 月黯然去世.

18 世纪的优秀数学家们几乎都在分析学的百花园里留下了自己的足迹，达朗贝尔也是如此. 他因在级数理论中留下了以自己名

字命名的判别法等贡献而青史留名.

为反驳伯克雷大主教对新生的微积分的指责，牛顿曾经含糊地指出导数是增量之比的极限，而达朗贝尔则明确提出导数是增量之比的极限. 达朗贝尔指出：关于无穷小量所作的假设只是为了缩短和简化推理，然而，微分学本身并非一定需要假设这种量的存在. 而且，这种计算就是用代数方法来确定我们已用线段表示的、并通过使两个表达式相等而得到的一个比的极限……其实，那些微分必须被另一些无穷小量相除. 在此情况下，它们既不代表无穷小量，也非表示无穷小量之商，而是两个有限量之比的极限[1]. 达朗贝尔理解的导数就是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

达朗贝尔给出了一个较好的极限概念：一个变量趋于一个固定的量，趋近程度小于任何给定的量，且变量永远达不到固定量. 但他未能把他的概念用公式表现出来. 卡尔·鲍耶（C. Boyer）指出：达朗贝尔未能逃脱传统的几何方法的影响，不可能把极限用严格的形式阐述，但他是当时几乎惟一把微分看作函数极限的数学家.[2]

无穷级数是数学领域一项具有重要地位的课题，并且与分析学的其他部分密不可分，但考虑级数敛散性的数学家可谓凤毛麟角，而达朗贝尔却是少数人中的一员. 在其《百科全书》中的"级数"条目里给出了收敛级数的定义：当级数的项数增加而级数值愈来愈趋向某个有限量，则称此级数为收敛级数. 然后，他给出了一个判别无穷级数绝对收敛的方法：如果级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

---

〔1〕D. J. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200～1800, Harvard University Press, 1969.

〔2〕G. Bossange et L. Belin (editors), Oeuvres completes de D' Alembert, Vols 1～5, Paris, 1821; Reprints, 1967.

的相邻两项之比的绝对值 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$，在 n 大于某固定正整数 N 时，永远小一个与 n 无关的正数 r，且 $r<1$，这种级数为绝对收敛级数，这就是迄今仍然广泛使用的“达朗贝尔判别法”. 在 1768 年出版的《数学手册 5》中，达朗贝尔指出：所有基于不收敛级数的推理，在其看来都是非常可疑的. 但是他的观点并未引起足够的重视，对于发散级数人们照用不误.

微分方程领域，达朗贝尔在求解方面得出了重要的结果. 达朗贝尔解高阶常微分方程的一个基本方法是降阶法：首先把二阶方程降价为一般形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\alpha(x)+\beta(x)y+\phi(x)y^2,$$

并于 1763 年命名其为“里卡蒂方程”[1].

达朗贝尔对弦振动的研究、对偏微分方程的诞生起到了重要的推动作用，在其 1746 年发表的《张紧的弦振动时形成的曲线研究》(Recherches des courbes formé par vibration de la corde tendue）中，首次提出了波动方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

其中 a 为常数，与弦的密度与张力有关. 达朗贝尔证明了这个方程的解是函数 $at+x$ 与函数 $at-x$ 的和.

4 年后，达朗贝尔引进了分离变量法，把如上的波动方程的解表示为

$$y(t,x)=g(t)h(x).$$

---

〔1〕 里卡蒂（Jacopo Francesco Riccati，1676．5—1754．4）：意大利数学家，在微分几何、微分方程、数学分析等方面都有所贡献，特别是发展了方程降阶和变量的理论．1724 年，他提出讨论方程 $x^{\mathrm{m}}-\frac{y^2}{x^{\mathrm{n}}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的可积性问题，得到丹尼尔以及欧拉等著名数学家的积极响应，这类方程后来称为里卡蒂方程.

代入波动方程后，可化为$g(t)$和$h(x)$的两个常微分方程．接着，他还证明了，$g(t)$和$h(x)$分别为t和x的周期函数．

此后，达朗贝尔继续对弦振动问题进行了深入研究．1763年得到广义的波动方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=A(x)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

作为数学分析中一些分支的开拓者，达朗贝尔的成就仅仅次于欧拉和拉格朗日．此外，他对力学发展所做的贡献也有目共睹．

2．拉格朗日的工作

拉格朗日（图像22）生于意大利都灵（Turin）一个富裕家庭，卒于法国巴黎，是法国数学家、力学家、天文学家，作为分析学的开拓者其成就仅次于欧拉．拉格朗日的经历非常复杂．曾在都灵大学学习，他未能满足父亲让他学习法律的愿望，却深深地爱上了自然科学．在数学家雷维里（F. A. Revelli）的指引下，17岁的拉格朗日对当时迅猛发展的分析学产生了浓厚的兴趣，并矢志从事分析学的研究．

18岁的时候，拉格朗日独自推出了求两个函数乘积的导数的莱布尼茨公式．他对变分极值的研究，获得了时任普鲁士科学院数学部主任的大数学家欧拉的赏识，因而他在都灵名声日隆，19岁即被任命为都灵皇家炮兵学院教授．从此，拉格朗日的事业开始蒸蒸日上．

1756年9月，拉格朗日被任命为普鲁士科学院副院士．10年后，一方面朝野及其本人都感到他在都灵无法充分发挥才能，另一方面，得到普鲁士国王腓特列二世的盛情邀请，拉格朗日起程赴柏林．此前，拉格朗日曾借以王朝代表的身份赴伦敦公干之机，结识了达朗贝尔和丹尼尔·伯努利．

柏林时期是拉格朗日一生研究的鼎盛时期，得到了大量的研究

成果．他大部分的论文都发表在《科学院文献》（Mémoires des l' Academie royale des sciences）和《柏林科学院新文献》（Nouveaux memoires de l' Academie des Berlin）上．

在柏林期间，拉格朗日还完成了一部著作《分析力学论述》（Traité de Mécanique Analytique），但此书直到他到达巴黎后的1788年才得以出版，并成为分析力学的经典著作．

1786年8月普鲁士国王腓特列二世去世，拉格朗日失去了自己的支持者．普鲁士人的排外主义波及到科学界，作为一名外籍科学家，拉格朗日感到柏林的环境已不适合学术研究，于是接受法国国王路易十六（Louis XⅥ，1754—1793）的盛情邀请离开柏林去巴黎，并在那里度过了他最后的时光．1789年，法国资产阶级革命爆发，革命政府一度下令把所有外籍人士驱逐出境，但特别声明拉格朗日可以例外．在巴黎期间，他总结了自己先前的研究成果，出版了大量的有分量的著作．1799年雾月政变后，拉格朗日被拿破仑（Napoleon）封为伯爵．1813年4月11日因病去世．

作为法国学派数学分析的最主要的开拓者，拉格朗日在18世纪的主要分支如微分方程、变分法等都作出了开拓性的贡献．

都灵时期，拉格朗日首先在变系数常微分方程方面取得了重大突破．他在降阶过程中提出了后来所称的伴随方程以及与伴随方程相关的问题．此外，他还把欧拉的常系数齐次方程的结果推广到变系数情况．

到达柏林之后，拉格朗日在微分方程的奇解和特解的研究方面取得了令世人瞩目的突出贡献．他对奇解和特解的系统研究发表在其1774年出版的《关于微分方程特解的研究》（Sur les intégrales particulieres des équations différentielles）中．明确提出了由通解及其对积分常数的偏导数消去常数求出奇解的方法；同时指出奇解为原方程积分曲线族的包络．

拉格朗日还肇始了对一阶偏微分方程的研究，他对一阶偏微分

方程理论的系统描述发表在其1772年完成的《关于一阶偏微分方程的积分》（Surl' integration des équation au differences partielles du premier order）和1786年完成《一阶线性偏微分方程的一般积分方法》（Méthod génèrale pour integrer les equations partielles du premier order lorsque ces differences ne sont que linéaire）上．拉格朗日因此被视作一阶偏微分方程理论的鼻祖．

他首先把一阶非线性偏微分方程的解分为完全解、奇解以及通解等，并指出它们之间的关系．拉格朗日把形如

$$\frac{\partial z}{\partial y}=Q\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$ [1]

的非线性方程，化为解线性方程

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\left(Q-p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial Q}{\partial x}-p\frac{\partial Q}{\partial z}=0,$$

这里 $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$．

此后，拉格朗日进一步证明，解线性方程

$$P_p+Q_q=R\quad (P,Q,R\text{ 为 }x,y,z\text{ 的函数})$$

与解

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

等价，而上式又与解常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R}$$

等价．此前，拉格朗日在天体力学特别是三体问题研究时，已经在解常微分方程组方面获得若干成果．

1797年出版的《解析函数论》（Theorie des Fonctions Analytiques)一书广泛地发展了微积分．拉格朗日提出一种新方法，试图

---

〔1〕偏导记号“∂”最初由拉格朗日倡导使用．

使微积分中不再出现微分、无穷小和极限等这些难缠的东西.

拉格朗日在这本书中，第一次给出了微分中值定理：

$$f(b)-f(a)=f'(\varphi)(b-a)(a\leqslant\varphi\leqslant b).$$

在这本书中，拉格朗日还用自己的新方法再次获得了泰勒展开式，并得到了日后以其名字命名的所谓的“拉格朗日余项”. 同时，拉格朗日还第一个认识到了这个展开式的重要性. 此外书中首次出现了“导数”这个术语以及导数符号 $f'(x)$.

拉格朗日的方法是这样的：把给定函数 $f(x)$ 幂级数展开，若用 $x+i$ 代替 x，则可得到

$$f(x+i)=f(x)+p(x)i+q(x)i^2+r(x)i^3+\cdots. \quad (4.1)$$

其中系数 $p(x),q(x),r(x),\cdots$ 是一些由原来的函数 $f(x)$ 导出的新函数. 拉格朗日把第一个系数 $p(x)$ 定义为 $f(x)$ 的一阶导数，并记为 $p(x)=f'(x)$. 为确定系数 $p(x),q(x),r(x),\cdots$，拉格朗日用 $i+o$ 代替 i，得到最终结果为

$$\begin{aligned}f(x+i+o)&=f(x)+p(x)i+q(x)i^2+r(x)i^3+\cdots\\&\quad+p(x)o+2q(x)io+3r(x)i^2o+\cdots.\end{aligned} \quad (4.2)$$

然后，他用 $x+o$ 代替（4.1）式中的 x，展开得

$$\begin{aligned}f(x+i+o)&=f(x)+p(x)i+q(x)i^2+r(x)i^3+\cdots\\&\quad+p'(x)io+q'(x)i^2o+r(x)i^3o+\cdots.\end{aligned} \quad (4.3)$$

比较(4.2)、(4.3)两式系数，得

$$q(x)=\frac{1}{2}p'(x)=\frac{1}{2!}f''(x),$$

$$r(x)=\frac{1}{3}q'(x)=\frac{1}{3!}f'''(x),$$

$$\cdots\cdots$$

如此得到所谓的泰勒级数

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2!}i^2+\frac{f'''(x)}{3!}i^3+\cdots. \tag{4.4}$$

关于泰勒级数，拉格朗日还得到了另一项影响深远的重大发现——泰勒展开式的余项，推导的过程如下：

首先用 $x-i$ 代替（4.4）式中 x，然后展开得

$$f(x)=f(x-i)+if'(x-i)+\frac{i^2}{2!}f''(x-i)+\cdots.$$

接着，用 xz 代替 i，得到

$$f(x)=f(x-xz)+xzf'(x-xz)+\frac{x^2z^2}{2!}f''(x-xz)$$

$$+\cdots+\frac{x^nz^n}{n!}f^{(n)}(x-xz)+x^{n+1}R(x,z). \tag{4.5}$$

与（4.4）式对比知 $R(x,o)=0$，然后，把上式对 z 微分，最后得到 $R(x,z)$ 对于 z 的偏导数

$$R'(x,z)=\frac{z^n}{n!}f^{(n+1)}(x-xz).$$

现在，设 M 和 N 分别是 $f^{(n+1)}(x-xz)$ 对于 $z\in[0,1]$ 的最大值和最小值，则由上式得到

$$\frac{Mz^n}{n!}\leqslant R'(x,z)\leqslant\frac{Nz^n}{n!}(z\in[0,1]),$$

又 $R(x,0)=0$，则把此不等式积分，得到

$$\frac{Mz^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant R(x,z)\leqslant\frac{Nz^{n+1}}{(n+1)!},(z\in[0,1]),$$

当 $z=1$ 时，得到

$$\frac{M}{(n+1)!}\leqslant R(x,1)\leqslant\frac{N}{(n+1)!}.$$

在此，拉格朗日已经知道中值定理成立，则对于某一 $\bar{z}\in[0,1]$，有

$$R(x,1)=\frac{f^{(n+1)}(x-x\bar{z})}{(n+1)!}$$

在（4. 5）式中设 $z=1$，并代入$R(x,1)$的值，最后得到

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}x^{n+1}，(u=x-x\bar{z}\in[0,x]).$$

其中$\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}x^{n+1}$即为拉格朗日余项.

变分法是 18 世纪分析学家们施展才华的重要领域，拉格朗日于 1760 年发表了用分析方法建立变分法的代表作《关于确定不定积分式的极大极小值的一种新方法》（Essail d'une nouvelle meÉthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales indéfinies）[1]. 拉格朗日曾将此文中的方法称为“变分方法”（the method of variation），在发表前告知欧拉并得到其首肯. 欧拉在此后的文章中正式将此法命名为“变分法”（the caculus of variation）.

在求积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值时，拉格朗日与欧拉不同，他不是用改变极大或极小化曲线的个别坐标的办法，他引进了通过端点(x_1,y_1),(x_2,y_2)的新曲线

$$y(x)+\delta y(x).$$

$\delta y(x)$叫做 $y(x)$的变分. J 相应的增量 ΔJ 按 δy，$\delta y'$ 展开的第一、第二阶项叫一次变分 δJ 和二次变分 $\delta^2 J$. 拉格朗日用分析方法证明了使 δJ 为 0 的必要条件就是所谓的欧拉方程

$$f_y-f_{y'x}-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y''=0$$

拉格朗日是 18 世纪的科学巨擘，为分析学发展做出的贡献与

〔1〕 Oeuvres de Lagrange（拉格朗日文集） edited by J. A. Serret, Vol. 1, PP. 334 ~362.

欧拉相比几乎毫不逊色．此外，他还是分析力学的开创者，使力学变成了分析的一个分支；他也是经典天体力学的奠基人之一〔1〕，他在这个领域的历史性成就仅次于拉普拉斯．

3．拉普拉斯、勒让德及蒙日

说到拉格朗日，就不能不提到同时代的拉普拉斯和勒让德两人，他们三人的名字都以字母“L”开头，所以人们称他们为“三L”，他们是当时法国科学界的“三巨头”．

拉普拉斯与其说是数学家毋宁说是天文学家，他把分析学大量地应用到天文学当中．在天文学的研究中，要处理大量的微分方程问题．1777年，拉普拉斯提出了一种解线性偏微分方程的一般方法〔2〕，就是所谓的级联法．拉普拉斯证明，一般二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}+\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\gamma\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}+\lambda z+\Gamma=0,$$

其中因变量 z 以及 α，β，γ，δ，λ，Γ 都是自变量 x，y 的函数，可以找到变换使 x，y 变为新变量 ϖ，θ 后，则上式可化简为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varpi\partial\theta}+m\frac{\partial z}{\partial\varpi}+n\frac{\partial z}{\partial\theta}+lz+\Gamma=0,$$

其中 m，n，l，Γ 都是 ϖ，θ 的函数．拉普拉斯还给出了求上面方程的全积分和奇积分的方法．

在微分方程方面，拉普拉斯还研究了奇解理论，奇解理论推广到高阶方程和三个变量的方程，发展了解非齐次线性方程的常微变易法，探求二阶线性微分方程的完全积分．此外拉普拉斯还给出了

---

〔1〕天体力学的基本理论和内容建立于18世纪后期，主要奠基人为欧拉、克莱罗、达朗贝尔、拉格朗日和拉普拉斯等人，最后由拉格朗日集大成正式建立经典天体力学．

〔2〕Recherches sur le calcul intégral aux differences partielles Mémoires de l’Academic royal dessciences de Paris（1773/1777），PP．341～402，1777，OCIX，PP．5～68．

后来以其名字命名的微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1778 年以后的 10 年里，拉普拉斯的创造力达到了顶峰，做出了许多具有重大意义的研究成果，其中有以其名字命名的拉普拉斯算子. 1779 年 6 月，他在科学院提出了讨论级数理论的学术报告，其中提出的微分算子成为后来 19 世纪出现的“运算微积”的先声.

事实上，拉普拉斯推广了拉格朗日的思想，即算子的正指数与导数的阶数对应，负指数与积分的重数对应. 他所提出的算子形式如下

$$\begin{cases}\Delta^n u = (e^{\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}-1)^n,\\ \sum^n u = 1/(e^{\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}-1)^n,\end{cases}$$

对任一函数 $u=u(x)$. 则有关系

$$\begin{cases}a^n\dfrac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} = \Delta^n u + s\Delta^{n+1}u + s'\Delta^{n+2}u+\cdots,\\ \dfrac{1}{a^n}\displaystyle\int^n u\,\mathrm{d}x^n = \sum^n u + f\sum^{n-1}u + f'\sum^{n-2}u+\cdots,\end{cases}$$

其中，s，s'，…，f，f'，…为常数且与 α 的函数无关，可由一些具体的函数 $u=u(x)$ 确定. 在此期间拉普拉斯还深入研究概率论以及与人口统计有关的问题，在研究概率论和级数理论的过程中提出了“生成函数”思想（1782 年）：如果 $y_n(x)$ 是 x 的函数族，而函数 $u(x,t)$ 为无穷级数

$$y_0(x)+y_1(x)t+y_2(x)t^2+\cdots+y_n(x)t^n+\cdots$$

之和，则称 $u(x,t)$ 为函数族 $y_n(x)$ 的生成函数.

拉普拉斯在其发明创造的鼎盛时期，硕果累累，他的研究范围主要是天体力学，他提出的轨道计算方法经过改进后在现在的人造卫星轨道计算中还在使用. 拉普拉斯在 1785 年的一篇论文中讨论椭球形行星的引力时，采用球坐标 (r,ω,θ) 表示势函数 V：

$$V(r,\omega,\theta) = \int \frac{R^2 \sin\theta' \mathrm{d}R \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\theta'}{\sqrt{r^2 - 2rR[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + R^2}},$$

这里(r,ω,θ)和(R,ω',θ')分别表示行星外质点及行星内质点的球坐标，积分对整个行星体进行. 如果令 $\mu=\cos\theta$，则可求出

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} + r\frac{\partial^n (rV)}{\partial \theta^2} = 0,$$

此式变换成直角坐标后就成为现在所称的“拉普拉斯方程”. 但当时他并未作这个变换，只是用此式对 V 的展开式作研究. 直到 1789 年，拉普拉斯在讨论土星环的引力势时，才首次用直角坐标得出著名的拉普拉斯方程

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

这个方程对后世的数学、物理学的发展影响深远.

拉普拉斯（图像 23）出生在法国诺曼底（Normandy）的博蒙(Beaumont）一个贫苦的农民家庭，靠邻居的资助入学. 曾攻读于博蒙军事学校，并担任该学校的教官. 18 岁时，拉普拉斯来到巴黎，呈上一份推荐书给著名的数学家达朗贝尔，未获理睬. 后来他又寄上一篇力学论文，这一次终于打动了达朗贝尔的爱才之心. 此后，拉普拉斯大部分的时间就在巴黎科学院度过，期间发生过改朝换代、政治运动. 一边得到拿破仑的青睐一边获得路易十八的垂青，左右逢源的拉普拉斯安全地度过了那段动荡不安而又不寻常的岁月. 他于 1799 年出版的《天体力学》（Mécanique céleste）包含了他在天体力学方面获得的许多重要成果，成为一部经典名著，产生了深远的影响，他对天文学的贡献可谓无与伦比. 1827 年 3 月，拉普拉斯卒于巴黎.

勒让德（图像 24）是巴黎人，早年毕业于马扎兰（Mazarin）学校. 1775 年任巴黎军事学院教授，5 年后转入高等师范学校，

1783 年当选巴黎科学院院士，1787 年成为伦敦皇家学会会员. 勒让德的研究领域包括数学分析、几何、代数等学科. 1784 年，他在科学院宣读的论文《行星外形的研究》（Recherches sur la figure des planètes）中给出了特殊函数理论中著名的“勒让德多项式”，并阐明了该式的性质. 简述如下：

作为勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[v(v+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right]y=0$$

之解的函数，其中 v 和 μ 是任意数. 若 $v=0$，1，…，而 $\mu=0$，则勒让德方程限制于 $[-1,1]$ 的解称为勒让德多项式，即区间 $[-1,1]$ 上具有单位权 $\varphi(x)=1$ 的正交多项式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

$$n=0,1,\cdots.$$

1786 年，勒让德在《科学院文集》（Mémoires de l' Académie）上发表变分法的论文，提出了变分学中最简单问题解的必要条件：为了曲线 $y_0(x)$ 给予泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x, y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$$

的一个极小值，必须在 $y_0(x)$ 的所有点被积函数对 y' 的二阶导数应是非负的：

$$F_{y'y'}(x,y_0(x),y'_0(x))\geqslant 0, x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

如果 y 是带有坐标 y_1，…，y_n 的 n 维向量，则勒让德条件要求二次型的非负性

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_{y'_i y'_j}(x,y_0(x),y'_0(x))\eta_i\eta_j\leqslant 0,$$

$$x\in[x_1,x_2], \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n.$$

对泛函的极大值的情况，勒让德条件中不等式的符号要反过来. 勒

让德条件是对弱极值的必要条件，如果违反了它，则泛函的二阶变分不保持其符号，而且曲线$y_0(x)$不给予此泛函一个极值. 如果在勒让德条件中非严格不等式的符号换成严格不等式符号，则此条件称为强勒让德条件，强勒让德条件与勒让德条件不同，不是必要的.

微分几何发轫于18世纪30年代青年数学家克莱罗对空间曲线理论的研究，经过欧拉等人的努力开拓，已经获得极大进展. 到18世纪末，在另一名法国数学家蒙日（Gaspard Monge，1746.5.9—1818.7.28）的努力下微分几何终于臻于完善.

蒙日对微分几何的研究是与对微分方程的研究交织在一起. 在微分方程方面，他开创了用几何来解释和分析运动的方法，并且认为，如同包含曲线的问题引导出常微分方程一样，包含曲面的问题可引导出偏微分方程. 蒙日开创了偏微分方程的特征理论，并引进了探讨偏微分方程的几何工具——特征曲线和特征锥（蒙日锥），特征面等概念. 不过这些思想并未被他同时代的人所理解.

蒙日早在其1771年的《关于曲率半径及重曲率曲线的各种拐点》（Mémoire sur les développées，les rayons de courbure，et les différents genres d’inflexions des cóurbe á double courbur）中给出了许多重要成果：曲面或曲线的各种性质可用微分方程来表示. 在寻求分析思想和几何思想的对应关系时，蒙日发现，有共同几何性质或用同一种方法生成的一簇曲面应该满足一个偏微分方程，他对这种曲面簇及可展曲面、直纹面等进行了深入研究，并获得了大量重要结果. 例如，他给出了可展曲面的一般表示，并说明了垂直于xy－平面的柱面外，这种曲面总满足偏微分方程

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0.$$

1795年，蒙日在其发表的《分析应用于几何的活叶论文》(Feuilles d’analyse appliquée á la géométrie) 中把自己的思想发展得更加完善. 他在三维微分几何方面所取得的成就即使欧拉也相形

见绌、望尘莫及.

蒙日（图像 25）出生在法国东部第戎（Dijon）之南的小镇博讷（Beaune）一个贫民家庭，卒于巴黎. 他是拿破仑时代法国数学界的领军人物. 蒙日曾任法国北部阿登省梅济耶尔（Mézières）军事学院的数学教员，1794 年成为巴黎理工科大学的教授，三年后荣升校长之职. 1795 年末，他参加筹建法兰西研究院，并于研究院成立后当选为研究员. 蒙日是法国大革命时期的激进派，一生与军界和政界有着很深的渊源. 在 1792 年共和国成立后，他曾担任短时的海军部长，签署过处决路易十六的报告书，并曾为法国的军事工业效力. 他还曾于 1798 年 7 月随拿破仑远征埃及，并在雾月政变后担任元老院的终身议员和议长. 1814 年，拿破仑战败，被推翻的波旁王朝〔1〕复辟，蒙日失宠被削职为民. 四年后，蒙日病逝.

蒙日是一位全才的科学家，研究领域包括：微分几何、微分方程、画法几何、解析几何、物理学、化学以及机械理论等. 由于他的科学贡献，人们对蒙日崇敬有加. 蒙日受到爱戴还有另外一个原因：他长期从事教学工作，培养了大批优秀人才，许多人日后成为驰名世界的数学家. 其中的佼佼者有泊松（Siméon-Denis Poisson，1781.6.21—1840.4.25）、刘维尔（Joseph Liouville，1809.3.24—1882.9.8）、傅立叶以及柯西等人.

---

〔1〕波旁王朝在法国厉行封建专制主义，法国大革命爆发后于 1792 年被推翻.

第五章　微积分的严格化

18世纪，尽管微积分学的逻辑基础还不严密，但这并未阻碍微积分学获得迅猛发展．在整个世纪里，数学家们以极大的热情投身于微积分的研究工作，一方面他们努力拓展微积分本身并把它应用到大量学科；另一方面他们试图为微积分学建立一个牢固的逻辑基础．结果是前一种努力获得了极大的成功，使微积分突飞猛进，硕果累累；后一种努力却趑趄不前，进展缓慢．在这种喜忧参半的气氛中，对微积分的研究进入了19世纪．

19世纪是倍受数学史家瞩目的世纪，古典数学在这一世纪里蜕变为现代数学的形态．新旧交替，万象更新，数学基本形成了现代的格局，因此可以说19世纪是数学史上最重要的时期．

19世纪，微积分的最大特点是基础的严格化获得成功．事实上，除了严格化运动外，与微积分有关的其他数学活动依然空前活跃，微积分的理论体系在多方面都有巨大发展，它对人类认识的启示也是史无前例的．在分析严格化后微积分和整个数学中基本概念的演进进程也远未结束．除了“无穷小”、“极限”、离散变量等，微积分也面临着向抽象化迈进的问题．这些深刻的矛盾存在是与柯西、黎曼、维尔斯特拉斯等人的严格化运动并行不悖的．如果我们给严格化高度重视而忽视了19世纪乃至20世纪微积分在发展中产生的其他问题，而这些问题又是数学主流中的基本问题的话，那么至少对微积分的认识是片面的．

不可避免的，19世纪初仍然弥漫着上个世纪的余音，法国数学家傅立叶的工作可以看作余音之一.

§5.1 傅立叶级数与傅立叶积分

傅立叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768.3.21—1830.5.16）是法国分析学派公认的代表，蒙日的得意门生，他的科学成就主要是对热传导问题的研究，他为进行这方面的研究而引入的数学方法尤为令人瞩目.

傅立叶（图像26）生于法国中部欧塞尔（Auxerre）城的一个裁缝家庭，8岁时父母双亡沦为孤儿，后被当地一主教收养后送入一地方军事学校读书. 少年的傅立叶聪颖好学，尤其对数学显示出非凡才能和极大兴趣. 1795年任巴黎理工科大学数学教师，在教学中锐意改革，对法国数学的兴起起到了极大的推动作用. 1798年傅立叶随拿破仑远征埃及，因克尽职守，深得拿破仑的器重. 1801年回国后被任命为伊泽尔（Isère）省格勒诺布尔（Grenoble）地方长官. 在14年的任职期间荣获功臣与学者的双重桂冠. 1808年被封为男爵，与此同时，傅立叶在数学研究上获得许多突破. 由于对热传导理论的突出贡献，傅立叶于1817年当选为巴黎科学院院士，1822年成为科学院终身秘书，1830年5月病逝.

傅立叶对热传导问题的研究开始于远在埃及的时候，但其大部分的研究工作是在担任诺布尔地方长官时完成的. 傅立叶早在1807年就完成了关于热传导的基本论文《热的传播》（Mémoire sur la propagation de la chaleur），但经过拉格朗日、拉普拉斯和勒让德

审阅后遭到拉格朗日的强烈反对而被科学院拒绝. 4 年后，傅立叶又提交了经修改的论文《热在固体中的运动理论》（Theorie dumouvement de chaleur clansles corps solides)，这篇论文在竞争中脱颖而出，获得科学院次年颁发的格兰德（Grand）奖金. 但遗憾的是仍然未能如愿发表，可能还是因为拉格朗日在作祟.

傅立叶一怒之下，发誓把这本书的数学部分扩充为一本书. 15 年之后，他的专著《热的解析理论》（Théorie anatylique de la chaleur）终于出版. 这部经典著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情况下使用的三角级数方法发展成内容丰富的一般理论，三角级数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rt\,\mathrm{d}t$$

$$+\sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rt\,\mathrm{d}t\Big]$$

后来以傅立叶的名字命名. 他用三角级数求解热传导方程，同时为了处理无穷区域的热传导问题又导出了现在所谓的"傅立叶积分"

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\infty}\cos q(x-t)\mathrm{d}q,$$

傅立叶级数与傅立叶积分都可以追溯到傅立叶的早期论文《热的传播》和《热在固体中的运动理论》中.

现代的傅立叶级数与傅立叶积分在形式上有所变化，但本质并无不同. 一方面，函数用级数展开，有时候便于对函数本身进行探讨与研究；另一方面，若将级数这种"离散"的和连续化，则无穷级数就变成了无穷积分，且这两者之间的定理几乎是对应的.

定义在 $[-\pi, \pi]$ 上以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$，若令

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos lx\,\mathrm{d}x=\pi a_1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin lx\,\mathrm{d}x=\pi b_1,$$

则由$f(x)$得到一个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

这个三角级数称为函数$f(x)$的傅立叶级数，而 a_0，a_l，b_l（$l=1, 2, \cdots$）称为函数$f(x)$的傅立叶系数. 若将傅立叶级数这种“离散”的无限次求和化为“连续”的无限次求和，就可得到傅立叶积分.

若$f(x)$在$[-l,l]$上可展成傅立叶级数

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n e^{in\bar{\omega}x}, \bar{\omega}=\frac{\pi}{l}$$

其中

$$F_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-in\omega\xi}\mathrm{d}\xi.$$

将 F_n 代入级数中，并令

$$\lambda_n=n\omega=\frac{n\pi}{l}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\Delta\lambda=\bar{\omega}=\frac{\pi}{l}=\lambda_n-\lambda_{n-1},$$

于是得到

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-in\bar{\omega}(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i\lambda_n(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\right)\Delta\lambda.\end{aligned}$$

当 $l\to\infty$时，$\Delta\lambda\to0$，因此，可将 $\Delta\lambda$ 看作定积分的无穷小区间，λ_n 看作数轴上的分点，上式右端的和式，可看作 λ 的函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}\mathrm{d}\xi$$

在（$-\infty$，∞）上的积分和，也就是当 $l\to\infty$时，上式成为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}\mathrm{d}\xi,$$

这里对 $f(x)$ 就没有周期限制.上式右端称为傅立叶积分,上式称为傅立叶积分公式.

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi$$

是 λ 的奇函数,因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 0.$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi$$

是 λ 的偶函数,因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi$$
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi.$$

又

$$e^{-i\lambda(\xi - x)} = \cos\lambda(\xi - x) - i\sin(\xi - x),$$

所以傅立叶积分公式可以写作

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_{0}^{\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda,$$

其中

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

傅立叶的贡献在于极大地推动了偏微分方程边值问题的研究,他给出不同边界条件下的积分法,提出求解热传导方程的变量分离法. 在此基础上,又将函数表示为由三角函数构成的级数和,并详

细讨论了系数的构成法则，从而建立起著名的“傅立叶级数理论”，开创了近代数学的一大分支．此外，傅立叶还发展了积分理论，提出了傅立叶积分，为用封闭形式求解偏微分方程提供了普遍方法．

然而傅立叶的工作的意义远非如此，它迫使人们对函数概念作修正和推广，特别是引起了对不连续函数的探讨．因此，《热的解析理论》不仅提供了用数学方法解决实际问题的范例而且影响了整个19世纪分析严格化的进程，并促进了19世纪纯数学的发展．

§5.2　微积分严格化的初步成功

17、18世纪，微积分是在没有严格基础的情况下创立和发展的，这个时期，大部分数学家都未把精力放在寻求微积分的严格基础上而是放在如何推进微积分本身以及如何应用它．尽管这对微积分的迅猛发展并未造成严重的阻碍，但是随着时间的推移，微积分发展到更为高级的阶段，数学家遇到了越来越多的困惑．

由于微积分中的概念缺乏统一的定义，这样就导致许多矛盾．即使是研究微积分的数学家们也对此颇有微词，更不用说揶揄微积分学说的贝克雷大主教等人了．

在这种情况下，捷克数学家、逻辑学家波尔查诺（Bernard Bolzano，1781.10.5—1848.12.18）（图像27）向在严格化基础上重建微积分的目标发起了冲击．他开始将严格的论证导入分析学中，对于分析基础的建立做出过不可磨灭的贡献．1816年，他在二项公式的证明中清楚地提出了级数收敛的概念，对极限、变量也有较深入的理解．波尔查诺在翌年发表了《纯粹分析的证明》（Rein analytischer Beweis，1817），以证明连续函数的中值定理为

目的，其中包含了对函数连续性、导数等概念的合适定义：如果在区间内任一点 x 处，只要 w（绝对值）充分小，就能使差

$$f(x+w)-f(x)$$

（绝对值）任意小，那么就是说 $f(x)$ 在该区间上连续. 1834 年，他用作图的方法构造出第一个处处不可微的连续函数的例子[1]，但遗憾的是，这个例子未能引起人们的注意. 波尔查诺对无穷理论的探究，是康托儿集合论的先驱，其哲学意义甚于数学意义，但是波尔查诺的工作长期湮没无闻.

1. 柯西的贡献

在分析学基础严格化的道路上走出开创性一步的是法国数学家柯西，分析学中的许多问题与柯西的大名紧密相连. 其名著《分析教程》(Cours d'analyse de l'école royale polytechnique)、《无穷小计算讲义》(Résumé des lecons données a l'Exole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal lagéemétrie)、《无穷小计算在几何中的应用》(Applications du calcul infinitésimal a la géométrie) 都具有划时代的意义，他的教程是严格分析诞生的标志.

柯西（图像 28）出身于巴黎一个有一定社会地位的富裕家庭，其父与数学家拉格朗日及拉普拉斯是莫逆之交. 1805—1807 年，柯西在巴黎理工科大学学习，其后在巴黎桥梁公路学院，两年后成为工程师. 曾专心研究过拉格朗日和拉普拉斯的著作. 1813 年，由于健康原因，他接受了拉格朗日和拉普拉斯的建议，放弃了工程师的职业，开始理论科学的研究. 三年后受聘为巴黎理工科大学教授，后来还担任了巴黎理学院和法兰西学院的教授.

柯西的性格特别倔强，是一个坚定的保王党人. 1830 年，法国国王查理十世（Charles X，1824—1830 在位）被推翻，路易·菲

---

[1] 参阅本书第六章，第一节.

力普（Louis Philippe，1830—1848 在位）登基，柯西由于不肯宣誓效忠新国王曾一度被剥夺了巴黎理工科大学的职位．直到 1848 年路易·菲力普君主政体被推翻，法兰西第二共和国成立取消宣誓后，柯西才于 1849 年被任命为巴黎理学院数学天文学教授．但好景不长，两年后又发生政变，帝制恢复，新君主再次要求公职人员宣誓效忠，依旧受到柯西的拒绝．1853 年，拿破仑三世终于网开一面，柯西可以特殊对待不用宣誓〔1〕．1857 年 5 月 12 日，柯西于巴黎附近的索克斯（Sceaux）镇因病与世长辞．除了巴黎科学院外，柯西还是众多其他科学院的外籍院士．

柯西的教材都是以微积分的严格化为目标，对于微积分中的基本概念给出了明确的定义，如函数、极限、连续、变量、导数、微分等等，建立了一个基本严格的体系，举例如下：

Ⅰ．自变量与函数：

当一些变量以这样的方式相联系，即当其中之一给定时，能够推知所有其他变量的值，则通常就认为这些变量由前一变量表示，此变量取名为自变量，而其余由自变量表示的变量，就是通常所说的该自变量的一些函数〔2〕．

Ⅱ．函数的连续性：

函数 $f(x)$ 是处于两个指定界限之间的变量 x 的连续函数，如果对这两个界限之间的每一个值 x，差 $f(x+a)-f(x)$ 的数值随 a 无限减小．……变量的无穷小增量总导致函数本身的无穷小增量，这是柯西给出的连续性的严格定义．

---

〔1〕与柯西一起享受此项特权的人还有法国物理学家阿拉哥（D. F. J. Arago，1786.2.26—1853.10.2）．

〔2〕A. L. Cauchy，Cours d’analyse de l’Ecole royale polytechnique；1re partie，Analyse algebrique，1821；Oeuvres，(2) 3（表示第 2 系列第三卷）．

Ⅲ. **极限与无穷小：**

柯西规定："当一个变量相继取得的值无限接近于一个固定的值，最终比与此固定值之差要多小就有多小时，该值就称为所有其他值的极限."“当同一变量相继取得的数值无限减小以至降至低于任何给定的数，这个变量就成为人们所说的无穷小或无穷小量. 这类变量以零为其极限.”柯西在极限理论中提出了 ε 方法（后又改成 δ 方法），把整个极限过程用不等式来刻画，使无穷的运算化为一系列不等式的推导，后来演变为 $\varepsilon-\delta$ 方法并沿用至今.

Ⅳ. **导数与微分学：**

柯西与前人一样用一元函数 $y=f(x)$ 的差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的极限来定义导数,而且他首次引进了导数符号 y' 或 $f'(x)$[1].然后定义微分,柯西首先把 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 写成

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}\quad(i=\alpha h),$$

其中 h 为有限量，而 i，α 均为无穷地小的量，上式可变为

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h\quad(i=\alpha h),$$

函数的微分定义为“当变量 α 无限趋于零而量 h 保持不变时上式左端所收敛的极限”[2]，柯西称为 $y=f(x)$ 的微分，用符号“d”表示，即 dy 或 $df(x)$（实际上，柯西的这一微分定义与后来的法国数学家加托（R. Gateaux，?·—1914）在泛函分析中给出的弱微

---

〔1〕A.L. Cauchy, Resumé des Lesons donnés a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, Tome premier, 1823; Oeuvres, (2)4, PP. 1～261.

〔2〕A. L. Cauchy, Resumé des lesons donnés a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, Tome premier, 1823; Oeuvres, (2) 4, PP. 1～261

分定义在本质上说是一致的).

若把函数 $f(x)=x$ 按定义写成

$$\mathrm{d}f(x)=\frac{x+i-x}{i}h=h=\mathrm{d}x,$$

再代入一般的 $f(x)$ 的微分定义式中,就得到 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

在进行了初等函数的一些典型的导数计算后，柯西引入了计算两个函数的复合函数的导数的“链式法则”：若

$$z=F(f(x)),$$

则

$$z'=F'(f(x))f'(x).$$

柯西还把导数转述为不等式，并由此证明了相关的一些定理.例如他率先用 ε-δ 语言证明了用不等式表示的微分中值定理，柯西还获得了日后以其名字命名的广义中值定理

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'[x_0+\theta(X-x_0)]}{F'[x_0+\theta(X-x_0)]},\theta\in(0,1),$$

由此推出了拉格朗日中值定理.

令 $X=x_0+h$, $f(x_0)=F(x_0)=0$,代入上式得到

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)},\ \theta\in(0,1).$$

如果令 $f'(x_0)=F'(x_0)=0$,再次应用广义中值定理,得到

$$\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}=\frac{f''(x_0+\theta' h)}{F''(x_0+\theta' h)},\ \theta'\in(0,1).$$

如此继续,应用 n 次广义中值定理,得到

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)},\ \theta\in(0,1). \tag{5.1}$$

这样就得到了计算高阶 0/0 未定形式的洛比达法则：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)},$$

其中 f 和 F 的前 n 阶导数在 x_0 的邻域内是连续的，而前 $n-1$ 阶

导数以 x_0 为临界点.

此后，柯西严格证明了已经知道的局部极值的高阶导数判别法. 考虑（5.1）式，假设 f 及其 $n-1$ 阶导数在 x_0 处都等于零，而 $F^{(n)}(x) \equiv n!$. 所以得到

$$f(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),\ \theta\in(0,1). \tag{5.2}$$

在此基础之上柯西还首次严格证明了带余项的泰勒展开式.

若函数 $f(x)$的前几阶导数在 $[x_0, x_0+h)$ 上是连续的，则函数

$$F(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

的前 $n-1$ 阶导数在 x_0 处都等于零，因此由（5.2）式得到

$$F(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x_0+\theta h).$$

显然 $F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$,从而得到

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n.$$

令 $x_0=a, h=x-a$,则上式变为：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n,$$

此即所谓的带拉格朗日余项的泰勒展开式.

V. 多元函数微分定义

仿照一元微分概念的处理. 柯西定义多元函数 $u=f(x, y,\cdots)$ 的微分（即全微分）为

$$\frac{\Delta u}{\alpha}=\frac{f(x+\alpha h, y+\alpha k,\cdots)-f(x,y,\cdots)}{\alpha}$$

当 α 趋于 0，而 h，k，…保持不变时的极限.

为了得到类似 $dy=f'(x)dx$ 的式子

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots,$$

柯西令 $h=dx$，$k=dy$，…并反复使用中值定理

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)\ \theta\in(0,1).$$

例如：

$$\frac{\Delta u}{\alpha}=\frac{f(x+\alpha h,y+\alpha k,\cdots)-f(x,y,\cdots)}{\alpha}$$

$$=\frac{f(x+\alpha h,y+\alpha k,\cdots)-f(x,y+\alpha k,\cdots)+f(x,y+\alpha k,\cdots)}{\alpha}$$

$$\frac{-f(x,y,z+\alpha l\cdots)+f(x,y,z+\alpha l)-\cdots-f(x,y,\cdots)}{\alpha},$$

再取极限得

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\cdots.$$

这里实际上假定了 f 对 x 的各个偏导数是连续的，以使

$$f'(x+\theta h)\to f'(x)(h\to 0),$$

但是柯西并未明确提出这个假设. 实际上人们发现这里的 f 的各个偏导数都是连续的.

Ⅵ. 积分学：

柯西给出了连续函数定积分的确切定义，而且证明了它的存在性：首先，假定函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x]$ 上连续，用分点 x_1，x_2，…，x_{n-1} 把该区间划分为 n 个不相同的子区间，然后取和

$$S_n=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(x-x_{n-1})$$

$f(x_{n-1})$,

并证明“当各个部分长度变得非常小而数 n 非常大时，划分方法对 S_n 的值的影响微乎其微”，因此当各个部分长度无限减小时 S_n 具有极限，它“只依赖于 $f(x)$ 的形式和变量 x 的边值 x_0 和 x. 这个极限就是我们所说的定积分”. 即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x.$$

这个定义后来被黎曼直接推广，每个子区间的端点 $x_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n)$ 用子区间内任一点 ξ_i 来代替时，就得到现在的黎曼积分，其中 S_n 称为黎曼和.

柯西的定义是从仅把积分看作微分逆运算迈向现代积分理论的转折点，他所倡导的先证存在性则是从依赖直觉到严格分析的转折点.

在定义了定积分之后，柯西给出了定积分计算的一些性质：

$$\int_{x_0}^{X}[af(x) + bg(x)]\mathrm{d}x = a\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x + b\int_{x_0}^{X} g(x)\mathrm{d}x$$

以及

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\bar{x}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\bar{x}}^{X} f(x)\mathrm{d}x.$$

在上述概念的基础上，柯西用中值定理证明了极值点处切线的水平性，并且证明了判断函数极值的方法. 此外他还给出了微积分基本定理证明的严格表述：在区间 $[x_0, X]$ 上给定连续函数 $f(x)$，对于 $x \in [x_0, X]$，由上式的性质及中值性质，柯西得到了

$$\begin{aligned}\bar{F}(x+a) - \bar{F}(x) &= \int_{x_0}^{x+a} f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x+a} f(x)\mathrm{d}x \\ &= af(x+\theta a),\ \theta \in [0,1].\end{aligned}$$

等式两边除以 a，令 $a \to 0$，取极限

$$\lim_{a \to 0} \frac{\overline{F}(x+a) - \overline{F}(x)}{a} = \lim_{a \to 0} f(x + \theta a),$$

即得到

$$\overline{F}(x) = f(x),$$

其中 $\overline{F}(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数或反导数. 若 $f(x)$ 为连续，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x).$$

Ⅶ. 级数的敛散性：

柯西首次明确提出，以部分和有极限来定义级数收敛并以此极限定义收敛级数的和：称

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \quad (n \in \mathbf{N}_+)$$

为无穷级数的部分和或前 n 项和，如果存在某一极限 S 使得

$$S_n \to S \quad (n \to \infty),$$

则称级数为收敛级数，并说它收敛于 S，否则就称级数是发散的. 在收敛级数定义的基础之上，柯西比较严密地建立了完整的级数理论.

柯西不但给出了级数收敛的严格定义，而且给出了级数收敛性的判别准则：

无穷级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛的充分必要条件为：对任一 $\varepsilon > 0$，存在一自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n > m > N$ 时，

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

成立，即

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

成立. 柯西只证明了这个准则的必要性，认为其充分性是理所当

然的.

在柯西判别准则中，特别取 $m=n-1$，则 $S_n-S_{n-1}=u_n$，所以得到：

如果级数 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$收敛，则必定有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

这是级数收敛的必要条件.

对于一般项级数，柯西引进了绝对收敛的概念：如果级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，则称级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

绝对收敛. 柯西指出：绝对收敛级数必收敛；收敛级数之和必收敛，但积未必收敛.

除了上述的判别准则外，柯西还提出了更一般些的判别法. 比如：

比较判别法： 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为两个正项级数（$u_n\geqslant0$，$v_n\geqslant0$），且 $u_n\leqslant v_n$（$n=1, 2, \cdots$），那么

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

根式判别法：如果级数 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$有

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|^{\frac{1}{n}}=r,$$

则当 $r<1$ 时级数绝对收敛；当 $r>1$ 时级数发散；当 $r=1$ 时不可判定.

至于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

的收敛问题，应用柯西的根式判别法，只要极限

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}}$$

存在，则 R 必为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ 的收敛半径．后来的法国数学家阿达马（Jacques Hadamard，1865.12.8—1963.10.17）于 1892 年重新独立发现了这个收敛半径公式．

此前的众多数学家还无人认识到无穷级数理论并非多项式理论的简单推广而应当以极限为基础建立其完整理论，柯西是认识到这一点的第一人．

柯西的研究一开始就引起了世人的瞩目，微积分在他的辛勤努力下成为一个逻辑上紧密联系的体系．当柯西在巴黎科学院宣读第一篇关于级数收敛性的文章时，使德高望重耄耋之年的拉普拉斯大惊失色，会后他匆忙赶回寓所去检查他那五大卷的《天体力学》里的级数，幸好他发现里面用到的级数都是收敛的．

柯西的工作向分析的全面严格化迈出了关键的一步，今天柯西被誉为数学严格化现代纪元的奠基人．由于柯西对数学分析的解释，使得这一学科首次成为具有现在仍保留着的一般特点的微积分．

2．黎曼积分

在柯西之后，分析基础严格化运动远未停止，甚至可谓方兴未艾．作为当时数学泰斗的柯西并未很好地区分连续性与一致连续性，也未能系统地使用 $\varepsilon-\delta$ 语言，并且有时用语比较模糊，在证明一些定理时，对于一些论断他会采取理所当然的态度．

德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826.9.17—1866.7.20）给出了柯西积分的推广．柯西给出的可积函数都是连续的，而黎曼则把可积函数从连续函数推广到在有限区

间内具有无穷多个间断点的函数.

傅立叶级数与数学分析的许多进展密不可分，黎曼对不连续函数的引入可以追溯到他对傅立叶级数收敛性的研究. 1854 年，黎曼在其“就职论文”（Habilitationschrift）《论函数通过三角级数的可表示性》（Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer trigonometrische）重新试图用三角级数来表示函数.

黎曼的文章首先回顾了傅立叶级数的历史. 早在 1829 年，狄利克雷（Peter Gustav Lejeune Dirichlet，1805.2.13—1859.5.5）证明了：如果周期为 2π 的函数 $f(x)$ 是逐段连续的并且在区间 $[-\pi,\pi]$ 内只有有限个局部极大值和极小值，则它的傅立叶级数逐点收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

即左右极限的平均值（假设这些极限在每一点上都存在）. 狄利克雷第一次给出了给定函数 $f(x)$ 傅立叶级数收敛并且收敛到 $f(x)$ 本身的充分条件.

黎曼在研究了狄利克雷的论文之后，做出了自己的工作.

Ⅰ. 更进一步拓展函数的概念：

黎曼把函数定义为实数集之间的任意对应.

Ⅱ. 对于更一般的函数建立可积性理论：

黎曼赋予 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 新的理解.

取 a 和 b 之间的数列 x_1，x_2，…，x_{n-1}，按大小排列，为简单起见，令

$x_1-a=\delta_1$，$x_2-x_1=\delta_2$，…，$b-x_{n-1}=\delta_n$，设 ε_i 为一些正的真分数. 此时，和

$$S=\delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\cdots+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

的值与区间 δ_i、ε_i 的选择有关. 如果和 S 具有这样的性质，即不论 δ_i 和 ε_i 怎样选择，只要所有的 δ_i 都无限减小，它就趋近于一个固定的值 A，这个极限就是 $\int_a^b f(x)dx$. 如果和 S 不具有这样的性质，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义.

黎曼在上述划分的第 i 个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任选一点 $\xi_i = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$，则把 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

其中 δ 代表 $[a, b]$ 划分成的各子区间的长度 δ_i 的最大值，称为划分的细度. 这是对柯西积分的直接推广. 本质区别是，黎曼用子区间内的任一点代替了柯西所取的子区间的左端点. 黎曼指出，当划分的细度 δ 趋向无穷小时，对应的近似值趋向一个固定值，而与点 ξ_i 的选择无关.

Ⅲ. 黎曼可积的充分必要条件：

i. 通过振幅的概念黎曼证明了，如果函数 $f(x)$ 是有界的，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分必要条件是：给定划分 P 的细度 $\delta > 0$，当 $\delta \to 0$ 时，有 $S(\delta, P) \to 0$，其中 $S(\delta, P)$ 表示 P 的振幅 $D_i > \delta$ 的那些子区间的长度 δ_i 之和.

ii. 令 M_i 和 m_i 分别为子区间 δ_i 上 $f(x)$ 的最大值与最小值. 令 $D_i = M_i - m_i$，暂不考虑实数的完备性问题，则 $f(x)$ 黎曼可积的充分必要条件为：当 $\delta\to 0$ 时，有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n D_i\delta_i = 0.$$

黎曼指出，一个函数在一个稠密点集上即使是不连续的，但它仍然可能是可积的，并给出了特例：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}.$$

1870 年代，几位数学家独自定义了闭区间［a，b］上有界函数$f(x)$的上、下黎曼和，即现在所称的达布（Jean-Gaston Darboux，1842.8.14—1917.2.23）和：

$$S_u = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n,$$
$$S_l = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \cdots + m_n\delta_n.$$

到了 1880 年代，意大利数学家沃尔特拉（Vito Volterra，1860.5.3—1940.10.11）[1]对应上、下黎曼和引进"上、下积分"，记为

$$S_u = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } S_l = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

函数 $f(x)$ 是可积的当且仅当上、下积分相等，即

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

黎曼积分是数学应用的主要分析工具，后来法国数学家勒贝格（Henri Léon Lebesgue，1875.6.28—1941.7.26）的工作使黎曼积分又获得一定发展.

黎曼一生的作品不多，甚至说很少，但是他的研究领域却极为广泛，因此他是对现代数学影响最大的数学家之一. 在数学的许多领域，黎曼都留下了自己的名字：黎曼曲面、黎曼-洛赫定理、黎曼积分、黎曼几何学、黎曼 ζ 函数，等等. 此外，他还是复分析三大奠基人之一.

---

〔1〕他是积分方程一般理论的创始人，建立了求解第二类积分方程

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^s K(s,t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

的一种解法. 而解第一类方程

$$f(s) = \int_a^s K(x,s)\phi(x)\mathrm{d}x$$

所用的方法是把它们化为第一类积分方程.

黎曼（图像29）出生在德国汉诺威丹嫩伯格（Dannenberg）附近的一个牧师家庭，母亲早逝，黎曼在父亲那里接受了启蒙教育. 大约在6岁的时候，他开始学习算术并显露出非凡的数学天赋. 14岁那年，黎曼到汉诺威去陪伴祖母并进入当地的文科中学学习. 他的数学才能引起了文科中学校长施马尔夫斯（C. Schmalfuss）的注意，因此他曾把自己的私人藏书借给黎曼并给予黎曼可以不去听课的特权. 在此期间，黎曼还研究了欧拉的著作从而掌握了微积分及其各个分支. 16岁时，祖母去世，黎曼转到吕耐伯格的预科中学，在那里度过了三年的学习时光.

1846年，19岁的黎曼进入哥廷根大学，在专攻语言与神学之外，他还听了高斯等人的数学课程. 翌年，黎曼转到柏林大学. 在柏林大学的两年，黎曼师从雅可比（Carl Gustav Jacob，1804.12.10—1851.2.18）、狄利克雷以及爱森斯坦（Ferdinand Gottold Max Eisenstein，1823.4.16—1852.10.11）等数学大家，受益非浅，他真正走进了五彩缤纷的数学天地. 1849年春，黎曼返回哥廷根大学去继续他的数学学业并为撰写博士论文作准备.

1851年11月，在高斯的指导下，黎曼提交了他的博士毕业论文《单复变函数一般理论基础》（Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen Complwxen Grösse）并获得博士学位. 次年秋，狄利克雷来哥廷根度假，他对黎曼数学研究的影响是巨大的. 1854年，黎曼以其获得高斯高度评价的就职论文《论作为几何基础的假设》（Über die Hypothesen，welcheder Geometrie zu Grunde liegen）获得哥廷根讲师资格. 1859年，黎曼继任去世的狄利克雷的教授职位，而狄利克雷的教授职位则继任于1855年去世的高斯.

1862年，新婚的黎曼不幸染病，在朋友的帮助下，他获得政府的资助得以到意大利温和的地中海气候中休养，1863年春返回哥廷根，此行使他深深地爱上了意大利. 当年的8月，黎曼二赴意

大利，并在比萨度过了一年多的时光. 在这段时间里，黎曼与大批意大利数学家交往密切，其中包括早在1858年于哥廷根就已经熟稔的贝蒂（E. Betti）等人，意大利数学的复兴与黎曼等人有密切关系. 此时，黎曼病痾日见沉重不由得产生了思乡之念，遂于1864年10月回到哥廷根. 黎曼在哥廷根量力而行进行了一些科研工作，并于次年发表了他最后的一篇论文. 黎曼三赴意大利做恢复健康的最后努力，结果是，病入膏肓的黎曼在意大利的塞拉斯卡度过了最后的岁月. 去世之前，黎曼被选为一些国家的外籍院士.

§5.3　微积分的算术化

荏苒之间，微积分已经跨跃了100多年，期间大量有才华的数学家为它的发展与完善呕心沥血，鞠躬尽瘁. 在以柯西、黎曼为代表的数学家们的努力下，分析基础严格化已经取得突破性的进展，到了19世纪中叶终于获得圆满成功. 取得最后胜利的数学斗士就是德国数学家维尔斯特拉斯.

1. 实数理论

柯西的积分理论还远非绝对严格，例如，他在证明连续函数积分的存在性、证明级数 $\{S_n\}$ 收敛判别准则的充分性，即

$$|S_{n+r}-S_n|$$

对于一切 r 和充分大的 n 都小于任意给定的量以及证明中值定理

$$f(x)-f(x_0)=f'[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0),\theta\in(0,1)$$

时，理所当然地使用了后世所谓的“实数的完备性”，但在当时实数理论尚未建立. 维尔斯特拉斯很早就意识到，没有对实数系统的

深刻理解就不可能为分析奠定牢固的基础，就可能造成逻辑上的矛盾或在实际上时常产生错误. 19 世纪初，一般认为每一个连续函数都是可微的，只是在某些孤立的奇点处可能例外. 当维尔斯特拉斯在 1861 年柏林大学的讲义[1]中提出了一个处处连续却处处不可微的函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

时，人们受到强烈的震撼. 其中 a 为奇数，b 为常数且 $0<b<1$，使得 $ab>1+3\pi/2$（此前，波尔查诺已经提出过这种函数可惜未能引起人们的关注）. 他的例子使人们清楚地认识到重新考察分析基础的必要性，理所应当地认为实数系是已知的是不正确的，必须通过严格证明无理数的存在及其各种性质来构造和定义实数. 维尔斯特拉斯很早就意识到，为使分析具备可靠的基础，必须建立严格的实数理论.

维尔斯特拉斯是一位把严格的论证引进分析的数学大师，他的批判精神对 19 世纪产生了巨大的影响. 他在严格的逻辑基础上建立了实数理论，引入了 **R** 与 $\mathbf{R}^n$ 中一系列度量和拓扑概念，比如现在耳熟能详的有界集、无界集，点的邻域，集的内点、外点、边界点，集和序列的极限点，连通性等；维尔斯特拉斯用递增有界序列来定义无理数，给出了数集的上下限、极限点和连续函数等严格定义. 证明了在某区间上任何连续函数都存在着一致收敛于它的多项式级数；波尔查诺 - 维尔斯特拉斯定理，即有界无限集必有极限点；有界数集上、下确界的存在性与数列上、下极限的存在性.

2. ε－δ 语言

维尔斯特拉斯在分析算术化方面的工作改进了波尔查诺、阿贝

---

[1] Weierstrass, K. W. T, Mathematische Werke, Ⅱ, 71～74.

尔和柯西的结果，关键是完成了柯西引进的用不等式描述的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义．维尔斯特拉斯指出：对于函数 $f(x)$，若能确定一个界限 δ，使得对其绝对值小于 δ 的所有 h 值，

$$f(x+h)-f(x)$$

小于可以小到人们给出的任何程度的一个量 ε，则称所给函数对应于变量的无穷小改变具有无穷小改变．他还由此给出了函数连续的定义，并证明了闭区间上连续函数的介值性和有界性．

对于函数项级数，维尔斯特拉斯引进了至关重要的一致收敛的概念：如果对给定的任何 $\varepsilon>0$，若有与 x 无关的充分大的 n 使得

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right|<\varepsilon,\ x\in[a,b]$$

成立，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛．

在定义微分学基本概念时，维尔斯特拉斯还以

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+o(h)$$

给出导数的另一种定义；他还把积分概念推广到在一个可数集上不连续的有界函数．

维尔斯特拉斯对于极限概念给出了纯算术的表述，最终大体上结束了这一进程．以往的极限概念总是具有连续运动的涵义：如果当 x 趋向于 a 时 $f(x)$ 趋向于 A，则称

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

维尔斯特拉斯对这种“动态”的描述极限的方式持否定态度，代之以不依靠运动和几何直观的“静态”描述——$\varepsilon-\delta$ 语言：对给定的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

以此种方式把积分中出现的各种类型的极限重新描述.

维尔斯特拉斯对分析的严格性要求之高可以说是无与伦比. 例如，他引进了一致收敛的概念，在他之前的数学家们深信收敛函数项级数可以逐项积分，但是维尔斯特拉斯发现证明这一点必须以一致收敛为基础. 前面提到的处处连续处处不可导的函数也是他从严格性出发所举出的例子.

在此之前的分析严重依赖几何直观，牛顿和莱布尼茨的微积分与几何曲线具有明确的联系，前人（欧拉、柯西等）在分析的算术化方面的先驱性工作只取得部分成功. 这是因为实数系还未构造出来，维尔斯特拉斯的工作脱离了几何直观的禁锢，从此以后，人们可以在实数这个广阔空间自由地研究微积分，而不再顾虑它是否具有几何意义.

在 19 世纪中后期的数学舞台上上演的是“分析算术化”运动——把分析建立在“纯粹算术”基础之上，而在这场运动中人们惟维尔斯特拉斯马首是瞻. 希尔伯特（David Hilbert，1862.1.23—1943.2.14）这样评价他:“维尔斯特拉斯以其酷爱批判的精神和深邃的洞察力，为数学分析建立了坚实的基础. 通过澄清极限、函数、导数等概念，排除了微积分中仍在涌现的各种争议，扫除了关于无穷大和无穷小的各种混乱观念，决定性地克服了起源于无穷大和无穷小概念的困扰. ……今日……分析达到这样和谐、可靠和完美之程度……本质上应该归功于维尔斯特拉斯的科学活动.”此外维尔斯特拉斯还与柯西和黎曼共享复分析奠基人的荣誉.

维尔斯特拉斯（图像 30）出生于德国西部的维斯特伐里亚(Westphalia）一个名叫奥斯腾费尔德（Ostenfelde）的小村庄的一

个政府官员家庭. 童年的维尔斯特拉斯成绩优秀，成为同学中的佼佼者. 1834 年，维尔斯特拉斯被父亲送进波恩大学攻读财务与管理，这是由于他希望子继父业，将来也能走上仕途. 但事与愿违，维尔斯特拉斯并不喜欢父亲所中意的专业而是把兴趣放在数学上. 在此期间，维尔斯特拉斯研读了拉普拉斯的《天体力学》以及雅可比等人的数学著作. 特别是刊登在《克雷尔杂志》(Journal für die Reine und Angewandte Mathematik) 上的瑞典数学家阿贝尔 (Niels Henrik Abel，1802.8.5—1829.4.6) 致法国数学家勒让德的一封信给予维尔斯特拉斯巨大的鼓舞，以至他在 1837 年底决定把一生献给数学研究. 翌年秋，维尔斯特拉斯放弃成为法学博士，没有取得学位就离开了波恩大学.

四年大学空去白回，白白浪费了大量钱财，父亲的态度可想而知. 在友人的斡旋下，维尔斯特拉斯于翌年夏天被送到附近的明斯特 (Müster) 神学哲学院，在那里他遇到了终生难忘的以研究"古德曼函数" (Gudermannian function) 而著称的古德曼 (Christoph Gudermann，1798.3.25—1852.9.25). 在古德曼的悉心指导下，维尔斯特拉斯的数学水平突飞猛进.

1842 年，维尔斯特拉斯到西普鲁士的克龙 (Krone) 中学任教，不但教授数学课程而且还教物理、德语、地理等课程. 在这些年里他坚持在业余时间刻苦钻研数学，尽管当时的科研条件极差而且经济拮据. 6 年后，维尔斯特拉斯转到东普鲁士布伦斯堡 (Brannsberg) 皇家天主教文科中学，生活与科研条件得到了很大的改观.

鉴于维尔斯特拉斯的数学贡献，1854 年柯尼斯堡大学授予他名誉博士学位. 1856 年好消息接踵而至，先是被柏林皇家综合工科学校聘他为数学教授，接着维尔斯特拉斯在默库尔 (Ernst Eduard Kummer，1810.1.29—1893.5.14) 的推荐下被柏林大学聘为副教授，然后当选为柏林科学院的院士.

1864 年，维尔斯特拉斯成为柏林大学的教授，从此以后，他开始了数学分析基础的研究. 几年之后，维尔斯特拉斯在欧洲开始名声显赫. 1873 年，维尔斯特拉斯就任柏林大学校长，忙碌的教学与公务活动使其健康每况愈下. 1897 年，维尔斯特拉斯因病辞世.

§5.4 实数理论的深化

维尔斯特拉斯决非惟一为分析基础严格化而投身实数理论研究的数学家. 在他建立实数理论后不久的 1872 年的同一年里，梅雷、康托儿、戴德金以及海涅（Heinrich Eduard Heine，1821.3.16—1881.10.21）几乎同时独立建立了实数理论. 其中康托儿和戴德金的构造法影响深远一直采用至今.

1. 戴德金分割

德国数学家戴德金（Julius Wilhelm Richard Dedekind，1831.10.6—1916.2.12）在 1858 年讲授初等微积分时就打算为微积分奠定一稳固的基础，他写到：

“我比任何时候都更加强烈地感受到这种算法缺少真正的科学的基础……就是现在，从教学观点来看，我仍然认为在开始叙述微积分时依靠几何直观的做法是有裨益的，而且为了节省时间，这样做也是不可避免的. 但是，决不能说以这种方式引入微积分是科学的，这一点谁也无法否认. 至于我个人，这种不满意的感觉是无法克制的，以至于下决心研究这个问题，直到为无穷小分析原理建立纯粹算术的和完全严格的基础时为止.”

戴德金的无理数理论见于 1872 年出版的《连续性与无理数》

(Stetigkeit irrationale Zahlen)[1]，书的引文中写道："上面把有理数域看作直线，结果认识到前者充满了空隙，它是不完备的、不连续的，而我们把直线看作是没有空隙的、完备的和连续的. 直线的连续性意味着什么？答案必须包含研究所有连续区域时所根据的科学基础……我们必须要有连续性的精确定义，使它可以成为逻辑推理的基础." "……直线上每一点 P 都将直线分成两部分，使得其中一部分的点都在另一部分的点的左方，我确信，连续性的实质就在于它的反面，也就是下面的原理：如果直线上所有的点都属于两类，使得第一类中每一点都在另一类中每一点的左方，那么就存在惟一的一个点，它产生了把直线分成两部分的分割 (Schnitt)."

戴德金的无理数理论的中心思想是"分割"概念.将一个有理数集合 Q 化分成两个非空不相交的子集 A_1 和 A_2，使得 A_1 中的每一个元素都小于 A_2 中的每一个元素，戴德金称这样的划分为有理数的一个分割，记作(A_1, A_2).此时，对于 A_1 和 A_2 有三种可能性：

Ⅰ　在 A_1 中可以存在一个数大于该集合中其他每一个数；

Ⅱ　A_2 中可以存在一个数小于该集合中其他每一个数；

Ⅲ　上述的两个数（A_1 最大、A_2 最小）皆不存在.

可以看出，Ⅰ和Ⅱ两种情况都是有理数产生的，只有Ⅲ可能产生无理数. 倘若Ⅲ成立，而我们在所有有理数的集合中"定义"一个确定的分割，使 A_1 和 A_2 趋于交会在一起，但为了使 A_1 和 A_2 交会，这个"分割"必须要由某个"数"填补起来. 例如：若 A_2 是由满足 $x^2>2$ 的所有正有理数 x 组成，A_1 为其余一切有理数组成. 结果是，既不存在 A_1 的最大元素，也不存在 A_2 的最小元素，因为不存在满足 $x^2=2$ 的有理数，可见这个分割就不是由有理数产生的. 戴德金指出：每当我们考虑一个不是由有理数产生的分割 (A_1, A_2) 时，就得到一个新数——无理数 a，我们认为这个数是

[1] Dedekind，R. Stetigkeit und die Irrationalzahlen, 1872.

由分割 (A_1, A_2) 完全确定的. 因此戴德金就把一切实数组成的集合 R 定义为有理数集的一切分割, 而一个实数 a 就是一个分割 (A_1, A_2). 戴德金用分割定义了无理数之后又给出了一个分割大于另一个分割的定义.

设 $\alpha=(A_1, A_2)$ 和 $\beta=(B_1, B_2)$ 是两个不同的实数, 若 A_1 是 B_1 的真子集, 则说 $\alpha<\beta$. 在此基础上, 戴德金证明了实数具有如下性质:

Ⅰ. 对于任意两个不同的实数 α 和 β, 则或 $\alpha<\beta$, 或 $\alpha=\beta$, 或 $\alpha>\beta$, 三者必居其一.

Ⅱ. 若 $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$, 则 $\alpha>\gamma$;

Ⅲ. 不同的实数 a 和 b 之间存在无穷多个实数;

Ⅳ. 若实数全体被划分成两类, 且一类中的每一个数都小于另一类中的每一个数, 则必有且仅有一个数产生这样的分割.

定义了实数及其大小关系之后, 就可以定义它的四则运算了.

戴德金的无理数理论与欧多克索斯的比例论颇为相似, 因此有人称其为"近代的欧多克索斯".

戴德金 (图像 31) 生于德国布伦瑞克 (Braunschweig) 卒于同地, 毕业于哥廷根 (Göttingen) 大学, 是高斯的得意门徒. 先后在瑞士苏黎士 (Zürich) 工学院和布伦瑞克工学院任教授并荣获两大学的荣誉博士学位. 他是哥廷根科学院、柏林科学院、巴黎科学院和罗马科学院的成员. 实数理论的建立是分析学发展史上的一个重大事件, 戴德金为此做出了不可磨灭的贡献.

2. 康托儿的基本列

几乎与此同时, 戴德金的同胞康托儿 (Georg Ferdinand

Ludwig Philipp Cantor，1845.3.3—1918.1.6）也建立起实数理论，他的出发点是满足柯西收敛准则的基本列．极限几乎是从事分析学研究的所有数学家都不得不面对的棘手的问题．而明确地定义极限必须以严格的实数系为基础．康托儿从有理数出发，通过基本列引入了无理数．

康托儿的实数理论出现在他的《关于无穷线性点集Ⅴ》中，在此，他引进了一类全新的数——实数，它既包含有理数也包含无理数．那么康托儿是如何得到无理数的呢？首先考虑有理序列 $\{u_n\}$，如果它满足下列条件：

对于任一给定有理数 $\varepsilon>0$，序列中除去有限个项外，彼此相差都小于 ε，换言之，对任一正整数 m 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+m}-u_n)=0$$

成立，这样的序列叫基本列，每个这样的序列定义一个实数．对于两个基本列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$，如果满足

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0,$$

则认为两者是等价的，即它们代表的是同一个实数．康托儿的定义相当于把实数集合定义为有理数的基本列的一切等价类的集合．此外，康托儿还定义了实数的四则运算法则和两个实数的不等关系．

比如实数 α 和 β 分别由基本列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 表示，则 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 分别由 $\{u_n+v_n\}$ 和 $\{u_nv_n\}$ 表示．若存在 $\varepsilon>0$，使得对于足够大的 n，有 $u_n\geqslant v_n+\varepsilon$，则说 $\alpha>\beta$.

令 $\{r_n\}$ 是任一实数序列，若对于任一正整数 p 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}(r_{n+p}-r_n)=0$$

成立，则必唯一存在一个实数 r，它被一个由有理数构成的基本列 $\{u_n\}$ 所确定，使得

$$\lim_{n\to\infty}r_n=r.$$

这说明，由实数构成的基本列不会产生任何更新类型的数，或者说

由实数够成的基本列无须任何更新类型的数来充当它的极限，因为已经存在的实数已经足够提供其极限了. 因此，从为基本列提供极限的角度来说，实数系是完备的.

康托儿还给出了用级数构造任意正实数 r 的方法：

$$r = c_1 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{4!} + \cdots$$

其中 c_i 满足不等式：$0 \leqslant c_i \leqslant i-1$. 上式现称为康托儿基数.

实数系建立之后，人们获知直线上的每一点都对着一个实数，那么反之如何？即“对于每一个实数，直线上都有一个点与之对应是否成立？”这必须通过公理才能保证. 由此可知，直线上的点与实数是一一对应的. 法国数学家梅雷（Hugues Charles Robert Méray，1835.11.12—1911.2.2）的实数定义与康托儿的“基本列极限”的实数定义本质上是相同的.

康托儿（图像 32）出生于俄国的圣彼得堡（St Petersburg），卒于哈雷（Halle）. 1862 年考入苏黎士大学学工，翌年转入柏林大学攻读神学和数学，师从库默尔（Ernst Eduard Kummer，1810.1.29—1893.5.14）、维尔斯特拉斯以及克罗内克（Leopold Kronecker，1823.12.7—1891.12.29）等著名数学家. 受维尔斯特拉斯的直接影响，由数论转向严格的分析理论的研究，不久就崭露头角. 康托儿对数学的最重大贡献是创立了集合论，集合论的创立是数学史上的重大事件. 他的工作给数学发展带来了一场革命，它的理论超越直观，虽然解决了许多问题，但也颠倒了许多人的固有想法，因此很难被立即接受. 集合论一问世，反对声就铺天盖地而来，而首要的反对者竟然是他的老师克罗内克. 著名数学家克莱因和庞加莱也加入到批判者的行列. 康托儿曾一度非常苦闷以至精神失常. 然而真金不怕火炼，历史终于公正地评价了他的创造.

严格的实数理论建立以后，长期以来令数学家们一筹莫展的问

题，比如连续、极限以及无穷小等变得迎刃而解. 同时，也使人们的思想产生了极大的飞跃，尤其是康托儿建立集合论之后. 此时的微积分已经以崭新的面貌做好了迎接20世纪的准备.

§5.5 对极限与无穷小的深入探讨

极限与无穷小是贯穿微积分发展史的逻辑主线，在柯西之前，极限与无穷小就像一个谜萦绕在数学家心头，它使人们感到不可琢磨，飘忽不定. 从古希腊算起，极限和无穷小困惑了人们2000多年. 因此，有必要对极限与无穷小加以深入探讨，这对加深对微积分发展史的认识不无裨益.

1. 极限概念与无穷小概念的历史变迁

有限与无限的矛盾是数学的基本矛盾之一，古人对这一问题的思考就有很多.

从公元前5世纪开始，古希腊人有了"原子"——构成物质的最小单位的观念. 反映在数学上，线是由不可分的原子——点构成的；面是由线构成的；体是由面构成的. 阿基米德的《方法》明白无误地体现出这种借助于基本微元的思考方法. 文艺复兴以后，伽利略、卡瓦列利以及开普勒等人把这种"原子论"改称为"不可分量"(indivisible) 法. 可是这种不可分量从未被严格地定义过，人们对它的理解也有许多不同. 后来，开普勒干脆用"无穷小量"取而代之. 文艺复兴时期的学者与阿基米德不同的是，他们把不可分量作为一种可靠的，既是发现问题又是解决问题的方法，而无须更严格的证明方法的支持. 开普勒之后，不可分量逐渐被称为无穷

小量.

莱布尼茨继承了开普勒的“无穷小量”的说法，应用在微积分理论之中，所以微积分还有另外一个名字：无穷小分析. 虽然莱布尼茨多次试图对无穷和无穷小下个清楚的定义，但这种尝试终归失败，最后他也只好说“……其实我们无须在这里把极限严密化……”，无穷小只是方便的工具而已.

与莱布尼茨同时代的牛顿，虽然为了说清最终比和最初比，首次引进了极限（limit）一词，但他的极限与我们今天数学中的极限不可同日而语，是个颇令人怀疑的东西. 我们无法确切知道英语中何时出现了“limit”一词，但它肯定不像我们数学中的“极限”一词有那么准确无误的含义. 随着牛顿使用“limit”一词，它走进了数学. 但应该指出的是，现代的极限概念与古希腊的穷竭法有着思想上的联系，至于管这个概念叫什么，其实无关紧要.

第一个想在数学中明确定义极限概念的似乎是法国的达朗贝尔，但整个 18 世纪都处在一种比较混乱的状态中. 一方面有些人对微积分的基础提出了严厉的批评，另一方面人们又在各种各样的努力中，尝试着建立严密的基础. 无穷小、极限，甚至幂级数都被考虑用做这种尝试. 在 17、18 世纪这一段微积分发展的初期，无穷小概念和极限概念基本上是平行发展的. 这两种方法有时一种被选用，有时混合在一起使用. 到柯西时代，两种方法基本上势均力敌，都比较普遍. 柯西的分析教程是微积分史上的里程碑. 柯西首先定义变量，然后用它去定义极限，而无穷小被定义为一种特殊的极限. 我们不知道无穷小与极限混合使用的混乱局面持续了多长时间，但从柯西以后，人们的思路似乎渐渐清晰起来. 人们接受了柯西对微积分的处理.

1870 年代，分析的算术化和实数理论的建立帮助 $\varepsilon-\delta$ 形式的极限概念获得了最后的胜利. 实数理论说明了无穷小是不存在的，而分析的算术化使人们抛弃了过去的那些动态的对极限的几何或运

动学的描述，接受了算术形式的静态语言．这使微积分明确达到了20世纪中所阐述的形式，也使“无穷小”这一概念暂时被尘封起来．

被长期湮没之后，无穷小概念因非标准分析的产生被人们重新认识．1960年，美籍德裔数学家鲁宾逊（Abraham Robinson，1918.10.6—1974.4.11）通过现代的模型论，证明了无穷小作为真正的数学对象可以建立于严格的逻辑基础，并将古典微积分重建在无穷小概念及其导出的结论上．

2. 极限与无穷过程之区别

从上面谈到的过程来看，极限概念实际上是一个历史较短的概念．到了达朗贝尔，才有了接近现代意义的极限，甚至牛顿都不算是极限理论的先驱．虽然他使用了极限一词．因为他的极限是未经数学抽象的日常用语，与我们所说的“极限”，即语言所描述的数学概念，还有相当距离．

从遥远的古代，人们就开始了对无限和无穷过程的观察，我们的祖先有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的说法，在古希腊也有芝诺悖论．为了解决与无穷过程有关的数学问题，希腊人既有前面已经谈过的“原子”，“薄片”法，又有所谓的“穷竭法”，即用一连串可以用有限计算来把握的量来不断逼近要求的量．阿基米德用这种方法来证明他所发现的规律．而刘徽的“割圆术”也基本上是这样一种精彩的思路．

然而，对于无限的逼近并不等于用了严格的极限理论，只有在说清了变量与它所要接近量的差可以小于预先给定的任意小的量，才能让人信服变量如何“趋于”某个常量，极限概念才从本质上真的诞生了．而从前所有关于无限过程的讨论，只能说是用到了“逼近”，因此谈到阿基米德或刘徽时，我们只能说他们使用了逼近的方法，或者叫做朴素的极限思想，而不能说他们已经有了极限的理

论，他们既无极限的定义，也未讨论过类似概念的性质.

3. 无穷小与无穷地小[1]

这里我们要指出的是一个似乎被以往的学者忽视了的一个重要事实："无穷小"这个概念在柯西以前一直被称为 infinitesiml（[法文] infinitésiml），而柯西有时把它改成了 une quantite infiniment petite（无限地小的量），即 infinitely small quantity，词义上有微小的变化. 由原来的极微小的，固定的量变成了不断变小的变量. 法语中本来是有"无穷小"（infinitésiml）一词的，比如"微积分(学)"现在仍称为 Calcul infinitésiml，即"无穷小计算". 可见柯西的改动是有意的（但这种改动似乎未能贯彻始终）.

柯西对无穷小的这一改动被分析严格化的完成者维尔斯特拉斯所继承，而且维尔斯特拉斯义无返顾地将这一改动贯彻到底.

维尔斯特拉斯的几个学生的一份课堂笔记也许可以帮助我们了解他的工作. 这是分别整理的维尔斯特拉斯于 1861 年讲授的《微分学》、1874 年讲授的《解析数论导引》和 1886 年讲授的《函数论选讲》的笔记. 从这里可以窥见维尔斯特拉斯用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义分析基本概念与论证分析基本定理的轮廓.

维尔斯特拉斯用 $\varepsilon-\delta$ 语言给出了一个重要概念："无穷地小"（infiniment petite，柯西已有此概念），它与"无穷小"（infinitesiml）存在本质区别. "无穷地小"原文为 infiniment petite，而非 infinitesiml，所以应当译作"无穷地小". 但国内外的一些重要文献将二者混淆. 当然汉语中"无穷小"也可理解为"无穷地小"，英文 infinitesiml 与 infinitely small 差别细微，但这两个词反映了微积分基本概念的历史变迁，所以要区分开来.

---

〔1〕参阅李家宏：《微积分若干基本概念的现代发展》，中国科学院，数学研究所，1998 届博士毕业论文.

Infinitesiml 是可以参加代数运算的，因而基本上是被当作数来看待的、本质上是固定的、“不可分”的点．而柯西－维尔斯特拉斯的 infiniment petite 是变量，一般不直接参与运算；Infinitesiml 是基本的，用来定义其他概念的．而柯西的无穷小从属于变量，维尔斯特拉斯的 infiniment petite 从属于 $\varepsilon-\delta$ 形式的极限概念．

第六章　微积分严格化之后

微积分基础的严格化，对整个数学的发展起到了很大的促进作用，可以说，严格化之后，整个数学的面目都焕然一新了．微积分更为深入、更为广泛地渗透到数学的各种分支中去．但以微分与积分作为主要矛盾的微积分自身的理论是怎样往前发展的?去向何处?

拙见以为：在微积分完成了严格化之后，微积分本身沿着三个不同，但相互影响的方向发展，这三个方向是：**1．微积分的深化与拓展；2．外微分形式；3．复数域上的微积分**．

§6.1　微积分的深化与拓展

1．经典微积分的局限性

微积分的基础虽然已经建立，但人们逐渐发现它仍有很大的局限性，主要有以下四点：

(1) 作为微积分中最为重要的定理，微积分的基本定理，即牛顿-莱布尼茨公式是这样说的：若函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{6.1}$$

这体现了微分与积分是一对矛盾，这里要求：函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(x)$在$[a,b]$上黎曼可积. 但即使像$f(x)=\sqrt{x}$这样简单的函数，如果 $a=0$，$b=1$，则$f(x)$在 $x=0$ 处在通常意义下不可微，而函数$f(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$在$[a,b]$上在通常意义下不是黎曼可积的，因此公式（6.1）不能用. 而且，即使$f(x)$在 $[a, b]$上可微，也不能保证$f'(x)$在$[a,b]$上黎曼可积. 但公式（6.1）是指出微分与积分互为逆运算的基本定理，上述的例子与对$f(x)$的要求，说明原有的微分、积分概念的局限性. 要想使微积分进一步发展，必须拓展微分与积分的概念，使（6.1）能在更为广泛的意义下成立.

（2）*勒贝格定理说：在一个闭区间上有界的函数黎曼可积，当且仅当这个函数的间断点的集合的测度为零.*

也就是说：*黎曼可积的函数，基本上是连续函数，与之相差不过是一个测度为零的集合*. 这样的函数类当然是太小了，尤其有下面的事实.

（3）*存在处处不可微的连续函数*. 使得人们认识到：*连续函数类与可微函数类相去甚远！*

首先举出这样的例子的数学家是波尔查诺，他是微积分严格化的先驱. 在 1817 年，他就给出了函数连续性、导数等基本概念的合适的定义，可惜的是，他的工作长期湮没无闻. 他在 1834 年，用作图的方法构造出第一个处处不可微的连续函数的例子[1]，这样重要的例子同样不为人们所注意，因之，将他的例子叙述如下：设 *PQ* 是与水平线斜交的直线，中点为 *M*，将 *PM*、*MQ* 分别四

---

〔1〕Kowalewski. G：Über Balzano nichtdifferenzierbare stetige Funktion，Acte，88 Math. XLIV（1923），315－319.

等分，记分点分别为 P_1，P_2，P_3 与 Q_1，Q_2，Q_3，令 P_3' 为 P_3 在过点 M 的水平线的反射点，Q_3' 为 Q_3 在过点 Q 的水平线的反射点，这就形成了折线 $PP_3'MQ_3'Q$. 再对这个折线的四个线段中的每一个应用上述作法，这样就得到一条由 4^2 个线段组成的折线. 依此方法无穷地连续地作下去，所得到的折线将收敛于一条曲线，而这条曲线就表示了一个处处不可微的连续函数.

波尔查诺的这么重要的例子可惜不为人们所注意. 直到 1861 年，维尔斯特拉斯用式子写出了一个处处不可微的连续函数的具体表达式（直到 1872 年，维尔斯特拉斯才写成论文发表），这才使人们震惊！他的著名例子就是上一章第三节中提到的

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

这里 a 为奇数，$b \in (0,1), ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

后来人们还举出了很多这样的例子，使大家认识到光讨论连续函数类是远远不够的. 而黎曼积分讨论的基本上只是连续函数类，这就有很大的局限性，因之，有必要来拓展积分的概念以能讨论更大的函数类.

(4) 在原有的微积分的框架下，很多定理都要求很强的条件，例如：

①若 $f_n(x)$，$n = 1, 2, \cdots$，在 $[a, b]$ 上连续，且一致收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{6.2}$$

如果“一致连续”的条件不满足，则有反例说明 (6.2) 不成立.

②若 D 为矩形 $[a, b] \times [c, d]$，f 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$$

成立．

还有一些结果显示出原有微积分的缺陷．如黎曼可积函数空间是不完备的，即不是一个巴拿赫（Stefen Banach，1892.3.30—1945.8.31）空间，这就大大限制了积分理论的进一步的发展．

具体地可叙述为：若定义区间$[a,b]$上的可积函数空间中的两个函数 f 与 g 的距离为（当然还可以定义别的距离）

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx,$$

若$\{f_n\}$为$[a,b]$上的一个黎曼可积函数序列，且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(f_n,f_m)=0$，则不能保证一定存在黎曼可积函数 f，使得$\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$．

以上四个问题，显示了原有微积分的缺陷和局限性，促使人们重新考虑进一步深化和拓展微分和积分的概念与理论，来克服这些缺陷和拓宽局限性，这就促使现在称之为实变函数论的内容的产生与发展．

2．勒贝格积分理论

由康托儿、勒贝格（Henri Leon Lebeshue，1875.6.28—1941.7.26）等人建立的这一整套理论使微积分的面貌焕然一新，其核心部分是勒贝格积分理论．这一整套理论现今称为实变函数或实分析，成为现代数学中的重要内容，且成为最重要的一种数学语言（重要的数学语言另外还有：代数语言、拓扑语言等等），也就是当人们要叙述或论证一些数学命题、定理、假设或理论时，必须要用这些数学语言来叙述或论证．实分析的语言在概率论、数理统计、调和分析、泛函分析等学科中的应用尤为显著．康托儿有关集合论的第一篇革命性文章发表于1874年的Crelle杂志上[1]．而勒

〔1〕Cantor. G: Über eine Eigenschelt des Inbegriffes aller reellen algebraischeu Zahlen, Crelles Jour für Math. 77（1874）s，258～262.

贝格的关于勒贝格积分理论的叙述首先在他的博士论文[1]中出现，时为 1902 年.

黎曼积分被勒贝格积分所替代，而原有的微分概念却并未被新的微分概念所替代. 之所以这样，其原因也许是：积分的概念与微分的概念有着本质上的不同，前者是整体的（Global）性质，而后者是局部的（Local）性质. 即使如此，由于测度论方法的引入使得微分理论也因之得到很大的革新.

至于勒贝格积分最本质的思想，也许用勒贝格（图像 33）自己的说法最为恰当. 他说：假如我欠了人家许多钱，现在要还，此时，先按照钞票面值的大小分类，然后计算每一类的面额的总值，再相加，这就是我的积分思想. 如不按面值大小先分类，而是按从钱袋中摸出的先后次序来计算总数，那就是黎曼积分的思想.

按勒贝格思想建立起积分理论，首先要解决一个如何度量“长度”的问题，于是就有了勒贝格测度理论.

由于这套理论的建立，使得微积分能够在一个更为广阔的天地中发挥它的作用. 而对微积分本身的理解与原有的认识相比，也达到了更为深刻的地步，这套理论将微积分推到一个更高的层次.

这时候，前面提到的原有微积分的缺陷与局限性，尤其是上文提到的四个问题，都得到了改善和解决.

（1）在勒贝格积分意义下，连续函数 f 使（6.1）成立，当且仅当 f 是绝对连续函数. 前面提到的例子，$f(x)=\sqrt{x}$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，故在勒贝格积分意义下（6.1）式成立. 此后，人们有许多研究，在勒贝格积分意义下，如何使（6.1）成立. 例如：虽然 f' 存在，但不能保证 $f'\in L$. 1980 年，科恩（Cohn）证明了如下的结果：若 f 在 $[a,b]$ 上处处可微，且 $f'\in L$，则（6.1）

---

[1] Lebesgue. H: Intégrale longueur, aire, Annali di Mathematica Pure ed, Appl, (3) 7 (1902), PP. 231～359.

成立. 这也许是在勒贝格积分意义下使（6.1）成立的最好条件. 但是，就使微分与积分互为逆运算的观点而言，勒贝格积分似乎还不够用，于是促使人们从勒贝格积分产生不久之后就逐步建立起来的更新的、更为广义的积分，如：当儒瓦（Arnaud Denjoy, 1884.1.5—1974.1.21，法国数学家）积分、佩龙（Oscar Perron, 1880.5.7—1975，德国数学家）积分等的角度来考虑这个问题.

（2）在黎曼积分意义下，考察的函数几乎都是连续函数类，而在勒贝格积分意义下，考察的函数类就扩充为可测集上的可测函数类，这是一个很大的扩充.

（3）在$[a,b]$上绝对连续函数几乎处处可导，这就说清楚了连续函数类与可微函数类之间的区别与联系.

（4）一些在原有框架下要求很强的定理，在勒贝格积分意义下可以松绑.

例如前面说到的原有微积分的缺陷与局限性中的（4）①可以宽松为勒贝格控制收敛定理：若$a_n(x)$与$a(x)$都是可测集D上的可测函数，且在D上$a_n(x)$几乎处处收敛于$a(x)$. 若存在$g(x) \in L(D)$，使得对每一个$n \geqslant 1$，在D上有$|a_n(x)| \leqslant g(x)$几乎处处成立，则$a_n(x)$与$a(x)$在D上可积，且

$$\lim_{n \to \infty} \int_D a_n(x) \mathrm{d}x = \int_D \lim_{n \to \infty} a_n(x) \mathrm{d}x = \int_D a(x) \mathrm{d}x.$$

显然勒贝格控制收敛定理比原有定理的条件也宽松得多了.

前面说到的（4）②可宽松为富比尼（Guido Fubini, 1879.1.19—1943.6.6，意大利数学家）定理：若$f \in L(R^n)$，$(x,y) \in R^p \times R^q (p+q=n)$，则

Ⅰ）对于几乎处处的$x \in R^p$，$f(x,y)$是R^q上的勒贝格可积函数；

Ⅱ）积分$\int_{R^q} f(x,y) \mathrm{d}y$是$R^p$上的勒贝格可积函数；

$$\text{Ⅲ)} \int_{R^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

显然富比尼定理比原有定理的条件也宽松得多了.

前面说到黎曼可积函数空间是不完备的，即不是巴拿赫空间，但 L^p 空间($1\leqslant p$)却是完备空间，即为巴拿赫空间，尤其 L^2 为希尔伯特（David Hilbert，1862.1.23—1943.2.14，德国数学家）(图像 34) 空间，这就克服了原有黎曼积分的一个重大缺陷.

1944 年，英国数学家李特尔伍德（John Edensor Littlewood，1885.6.9—1977.9.6）曾写过一本书叫《函数论讲义》[1]，关于实分析他说了这样一段话："知识的范围不像有时设想的那样大. 有三条原理，大致上可表达为：每个（可测）集几乎是有限个区间的并；每个（可测）函数几乎是连续的；每个（可测）函数的收敛序列几乎是一致收敛的.（实函数论）中的大多数结果是这些概念的完全直觉的应用，而学生们掌握了这些就等于掌握了大多数情况下实变函数理论所要求的. 若可以看到，由一个原理可以'很好'地证实一个问题的正确性，那么自然要问，'几乎'应充分接近到怎样的程度这个问题就可以确切地解决了."

李特尔伍德的这一番话是 50 多年前说的，现在读来依然感到很有意思，很重要，是画龙点睛之笔. 他紧紧抓住了实函数论中三个最重要的概念指出了：可测集与有限个区间之并、可测函数与连续函数、可测函数序列的收敛与一致收敛之间的区别与联系，刻画了相互之间的血缘关系. 这不仅仅指出了如何来思考与解决新的理论中的问题，而且还指出了新的理论与原有的理论尽管有本质上的不同，克服了原有理论中的种种缺陷，但又与原有的理论从某种意

---

〔1〕Litterwood. J. E, Lecture on the thoery of functions, Oxford University Press, 1944.

义上讲相距不远，指出了这两者之间的十分亲密的血缘关系．

在实分析中，的确不断出现以体现李特尔伍德三条原理形式的定理．如以下的定理就是体现原理1的，若 E 为集合，且外测度 m^*E 有限，则 E 为可测当且仅当：任给 $\varepsilon>0$，有一有限开区间之并 v，使得 $m^*(v\Delta E)<\varepsilon$，这里 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$，而 $B-A=\{x:x\in B$ 及 $x\notin A\}$．以下的定理是体现原理2的，若 f 为定义在 $[a,b]$ 上的可测函数，f 取 $\pm\infty$ 的集合的测度为零，则任给 $\varepsilon>0$，可以找到一个阶梯函数 g 及一个连续函数 h，使得 $|f-g|<\varepsilon$ 及 $|f-h|<\varepsilon$，除了一个测度小于 ε 的集合外都成立．以下的 Egoroff 定理就是体现原理3的，若 $\{f_n\}$ 为具有有限测度的可测集 E 上的可测函数序列，几乎处处收敛于 f，则任给 $\eta>0$，有一子集 $A\subset E$，$mA<\eta$，使得 f_n 在 $E-A$ 上一致收敛于 f．

这种体现李特尔伍德三条原理的定理还可以举出很多．总之李特尔伍德的三条原理充分说明了实分析与原有微积分之间的区别与血缘关系．

§6.2 外微分形式

1．高维空间的微积分基本定理

前面多次说到，微积分的诞生是在而且只是在牛顿、莱布尼茨证明了微积分基本定理的时候．这指出了微分与积分是一对矛盾，即它们是互为逆运算．那么到了高维空间，微分与积分是一对矛盾是如何体现的呢？按照微分与积分这对矛盾是微积分这门学科的主要矛盾的观点，其内容依然有三部分，即：微分、积分和指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，微分与积分这两部分易于理

解，到了高维空间，只是将一元微积分中的导数及微分推广成偏导数、方向导数与全微分；将积分推广成重积分，线积分、面积分等，而这些推广是十分自然的. 那么什么是高维空间中的微积分基本定理呢？要回答并说清楚这个问题还得费些口舌.

通常说的微积分，是在三维欧氏空间中讨论的微积分，而在三维欧氏空间中揭示微分与积分是一对矛盾是由以下三个定理（或公式）来体现的.

格林（George Green，1793.7.14—1842.3.31，英国数学家）**定理（或公式）** 设 D 是 xy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域，且函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏微商，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

这里 $\oint_L$ 表示沿 L 逆时针方向的线积分（见图 6.1）.

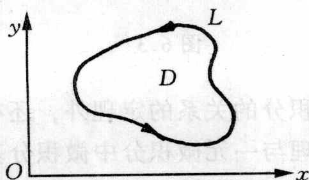


图 6.1

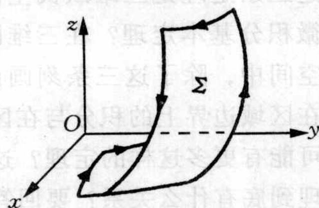


图 6.2

斯托克斯（George Gabriel Stokes，1819.8.13—1903.2.1，英国数学家）**定理（或公式）** 设空间曲面 Σ 的边界是封闭曲线 L，若函数 P，Q，R 有一阶连续偏微商，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 $\oint_L$ 表示沿图 6.2 中的方向的线积分.

高斯(Carl Friedrich Gauss,1777.4.30—1855.2.23,德国数学家)**定理**(**或公式**)设 V 是空间封闭曲画Σ所围成的闭区域,函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在 V 上有一阶连续偏微商,则

$$\iint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

这里$\Sigma_{外}$表示曲面Σ的定向为法线向外(图 6.3).

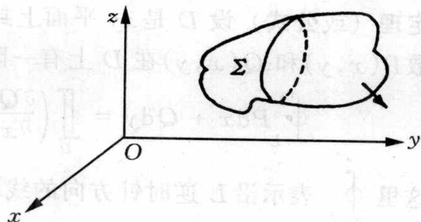


图 6.3

这三条定理(或公式)是任何多元微积分的书中所必讲的,这三条定理都是说函数在区域边界上的积分与在区域内部积分的关系. 但是,为什么说这三条定理是三维欧氏空间中微积分基本定理?在三维欧氏空间中,除了这三条刻画函数在区域边界上的积分与在区域内部积分的关系的定理外,还有没有可能有更多这样的定理?这三条定理与一元微积分中微积分基本定理到底有什么关系?要回答并说清楚这些问题,必须用到外微分形式.

要严格地定义什么是外微分形式,得用很多篇幅,而这方面的书籍已经很多. 如作为经典著作之一的由比利时数学家德拉姆(George-William de Rham,1903.9.10—1969.3.23)著的《微分流行》(“Differential manifold”,Springer,1984,译自法文)等. 一个在三维欧氏空间中外微分形式的通俗的介绍可参阅拙著《简明微积分》(第三版),1997 年,第七章 7.6 节. 在这里作一通俗而不严格的简要介绍.

2. 外微分形式简介

在一般的微积分书中，如果从 a 到 b 的直线段是正的，那么从 b 到 a 的直线段是负的，可是一涉及到面积就往往假设面积都是正的，如在二维欧氏空间中进行变量替换

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

则 x，y 平面的面积元素

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

这里 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 是 x，y 关于 u，v 的雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi，1804.12.10—1851.2.18，德国数学家）行列式，而对雅可比行列式要加绝对值其理由是，面积总是正的. 但是线段的长度可有正有负，为什么面积一定要是正的？如果去掉这个限制，可以允许面积可正可负，这可能就是引入外微分形式的最原始的思想.

对面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 引入外乘积 $\wedge$，$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 称为微分的外乘积，它要满足如下的规则：$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$，粗略来讲，这相当于面积元素按不同定向有正有负. 在这个规则下，立即得到 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$. 由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称为外微分形式. 微分在外乘积中的个数称为外微分形式的次数. 于是：若 P，Q，R，A，B，C，H 为三维欧氏空间中变量 x，y，z 的函数，则

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

为一次外微分形式(由于一次没有乘积,与普通的微分形式是一样的)；

$$A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

为二次外微分形式；

$$H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

为三次外微分形式，而 P，Q，R，A，B，C，H 等称为微分形式的系数，而称函数 f 为零次外微分形式.

对任意两个外微分形式 λ，μ 也可以定义外乘积 $\lambda \wedge \mu$，只要相应的各项外微分进行外乘积就可以了. 例如，A，B，C，D，E，F，G 为 x，y. z 的函数，且

$$\lambda = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z,$$

$$\mu = E\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y + G\mathrm{d}z,$$

则

$$\begin{aligned}\lambda \wedge \mu &= (A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z) \wedge (E\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y + G\mathrm{d}z) \\ &= AE\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + BE\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + CE\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + AF\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + BF\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y + CF\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + AG\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + BG\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &\quad + CG\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \\ &= (BG - CF)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (CE - AG)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (AF - BE)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对外微分形式 ω，可以定义外微分算子 d.

对零次外微分形式，即函数 f，定义

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

即是普通的全微分算子.

对于一次外微分形式

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z,$$

经过简单计算，

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

对于二次外微分形式

$$\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

也是一样，定义

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy$$

经过简单计算，

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

对于三次外微分形式

$$\omega = H dx \wedge dy \wedge dz$$

也是一样定义

$$d\omega = dH dx \wedge dy \wedge dz.$$

由于在三维欧氏空间中讨论外微分形式，易证此时 $d\omega = 0$.

有了这些准备之后，就可以说清楚在高维空间中微分与积分如何成为一对矛盾了.

先看格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

如果记 $\omega_1 = P dx + Q dy$，则 ω_1 为一次外微分形式，于是

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

由于线积分的曲线 L 是定向的，所以格林公式可以写成

$$\oint \omega_1 = \iint d\omega_1.$$

再看斯托克斯公式

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

由于线、面积都是定向的，把

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

看作一次外微分形式，于是

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y .$$

因之，斯托克斯公式可写为

$$\oint \omega = \iint \mathrm{d}\omega .$$

同样，高斯公式为

$$\iint_{\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

由于 Ω 是定向的，所以可将

$$P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

看作二次外微分形式，即记

$$\omega_2 = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y .$$

从而

$$\mathrm{d}\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z .$$

于是，高斯公式可写成 $\oint \omega_2 = \iiint \mathrm{d}\omega_2 .$

从这些可以立即看出，在三维欧氏空间，格林公式、斯托克斯公式与高斯公式实际上都可以用同一个公式写出来，这个定理（或公式）也叫做

斯托克斯定理（或斯托克斯公式）

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega \qquad (6.3)$$

这里，ω 为外微分形式，$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，Ω 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分区域，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数.

从这里还可以看出，除了格林公式、斯托克斯公式与高斯公式外，在三维欧氏空间中，联系区域与其边界的积分公式不会再有了，因为这时三次外微分形式的外微分为零.

不仅如此，回到一元微积分的情况，这时取 ω 为零次外微分

形式，即函数 $f(x)$. 取 Ω 为直线段 $[a,b]$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，这里就是端点 a 与 b，$\mathrm{d}\omega$ 就是 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$，公式（6.3）就成为

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mid_a^b = f(b) - f(a).$$

这就是一元微积分的基本定理.

归纳起来，在公式（6.3）中，当 ω 为零次外微分形式，Ω 为直线段时，此即牛顿-莱布尼茨公式；当 ω 为一次外微分形式，Ω 为三维空间中的曲面时，此即斯托克斯公式；当 ω 为二次外微分形式，Ω 为三维空间中的一个区域时，此即高斯公式. 它们之间的关系可列表如下：

外微分形式的次数	空间	公式
0	直线段	牛顿-莱布尼茨公式
1	平面区域	格林公式
1	空间曲面	斯托克斯公式
2	空间中区域	高斯公式

公式（6.3）揭示了在三维欧氏空间中微分与积分是如何成为一对矛盾的，这对矛盾的一方为外微分形式，另一方为线、面、体积分. 这个公式是说，高次外微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在区域上的积分等于低一次的外微分形式 ω 在区域的低一维空间的边界上的积分，外微分运算与积分起了相互抵消作用，就像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方相互抵消一样.

更为重要的是，在高维欧氏空间，当维数大于 3 时斯托克斯公式（6.3）依然成立，不但如此，当 Ω 是微分流形时，(关于微分流形不在此定义了，参阅有关文献)(6.3)依然成立. 这就说明斯托克斯公式(6.3)是微积分中具有本质性的定理，它不仅说清楚了三维欧氏空间中，为何微分与积分是一对矛盾，它们是如何体现的，而且还说清楚了高维欧氏空间，当维数大于 3 时，为何微分与积分是一对矛盾，它们是如何体现的，甚至说清楚了在微分流形上，为何微分与积

分是一对矛盾,它们是如何体现的.也可以说斯托克斯公式(6.3)是微积分这门学科的一个顶峰,是数学中少有的简洁、美丽而深刻的定理之一,也是近代数学中被应用得最广泛的定理之一.

再重新回到三维欧氏空间中来,在三维欧氏空间中,有着广泛应用,尤其是在物理上有广泛应用的三“度”,即梯度(gradient)、旋度(curl)与散度(divergence),现在在外微分形式的意义下来重新认识它们.

先看零次外微分形式$\omega = f(x,y,z)$,它的外微分形式为

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

而 f 的梯度为 $\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$,

所以梯度是与零次外微分形式的外微分相当.

再看一次外微分形式

$$\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

它的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

而矢量$\boldsymbol{u} = (P,Q,R)$的旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为 x-轴，y-轴，z-轴的单位矢量．所以旋度与一次外微分形式的外微分相当．

再看二次外微分形式

$$\omega_2 = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

它的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

而矢量 $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ 的散度为 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{\partial C}{\partial z}$，所以散度与二次外微分形式的外微分相当．

从这个观点来看，还有没有可能产生具有这种性质的其他的“度”呢？很明显，在三维欧氏空间，这是不可能的了．因为在三维欧氏空间，三次外微分形式的外微分为零，所以不可能再有与之相当的“度”了．所以从外微分形式的观点，在三维欧氏空间，有且只能有这三个度，即梯度、旋度与散度．它们与外微分形式的对应关系可列表如下：

外微分形式的次数	对应的度
0	梯度
1	旋度
2	散度

由于一般的微积分教材中，往往不讲外微分形式，而外微分形式实在太重要了，外微分形式的诞生标志着微积分发展的第三阶段．因为只有用外微分形式才能说清楚高维空间中为何微分与积分是一对矛盾，外微分形式使微积分从古典走向现代，从在欧氏空间上讨论微积分走向在流形上讨论微积分，这就是为什么我们花了这么多篇幅来讲外微分形式的原因．

仔细想想，外微分形式的产生是理所当然的事．

线段的长度可正，可负，为什么面积与体积就不能有正有负？但

要使面积与体积有正有负,就必须有定向(Orientation)的概念.

吴文俊老师在一文[1]中曾说了这样一段话:"法国著名拓扑学家托姆(René Thom,1923—)教授,曾经对本人表达过这样的意见,定向概念是几何拓扑中最具深刻意义的伟大创造之一,对于托姆先生的卓识,本人深为钦服."

有了定向概念,就有可能定义外微分,外微分形式.而这些概念的产生,使微积分的面貌发生了根本性的转变.例如:微积分中的格林公式、斯托克斯公式与高斯公式可以用外微分形式统一成为一个公式——外微分形式的斯托克斯公式(6.3).

实际上,有了微分,就会有微分形式.早在1740年,克莱罗就曾讨论过这样的微分方程 $A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y=0$,这里 A 和 B 都是 x,y 的函数.他指出,方程有解的充要条件是 $\dfrac{\partial A}{\partial y}=\dfrac{\partial B}{\partial x}$,方程的左边实际上为一次微分形式.后来出现了线积分与面积分,如 $\int A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z$ 及 $\iint A\mathrm{d}x\mathrm{d}y+B\mathrm{d}y\mathrm{d}z+C\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 等等,这里 A,B,C 都是 x,y,z 的函数.积分号下都是微分形式,如1855年,英国物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831.6.13—1879.11.5)在计算电流通量时,就应用了这种积分.

1899年,嘉当首先明确地定义了外微分形式,外导数等[2].1922年,他十分明确地写出了公式(6.3).1899年,庞加莱[3](图像35)给出了那著名的庞加莱引理及其逆,即:若 ω 为一外微分形式,其微分形式的系数具有二阶连续偏微商,则 $\mathrm{dd}\omega=0$.反之,若 ω 为一 p 次外微分且 $\mathrm{d}\omega=0$,则一定存在一个 $p-1$ 次的外

〔1〕吴文俊,龚升教授《简明微积分》读后感,数学通报,2000年1月,44~45页.

〔2〕Cartan. É, Sur certains expressions differentielle et le problem de Pfaff Ann, Sci. Ecole Norm.(3)T. 16,p. 239~332.

〔3〕Poincaré. H, Les Methodes Noutelles de la Mecanique Oaleste,1899.

微分形式 α，使得 $\omega = d\alpha$. 此外，他还将意大利数学家沃尔泰拉 (Vito Volterra，1860.5.3—1940.10.11) 的一个结果写成 (6.3) 的形式等等.

由于嘉当、庞加莱与法国数学家古尔萨 (Éouard - Jean - Baptiste Goursat，1858.5.21—1936.11.25,) 等数学家的努力，以及外微分形式在微分方程、微分几何等众多学科中的巨大成功，使得外微分形式得到蓬勃发展，成为现代数学中不可缺少的重要内容.

§6.3 复数域上的微积分

弗罗贝尼乌斯 (1849.10.26—1917.8.3，德国数学家) 定理说：实数域上所有有限维结合可除代数 (Division Algebra) 只有三个，即：实数域，负数域，四元 (Quaternion) 代数，如果去掉结合性要求，则实数域上还有另一个可除代数凯莱-狄克逊 (Cayley-Dickson) 代数，即八卦 (Octonion) 代数. 在实数域上的维数为 8.

由于四元代数不可交换，凯莱-狄克逊代数既不可交换又不结合，而复数域既可交换又可结合，且复数早已为人们所熟悉，于是人们在考虑原有微积分，即实数域上的微积分之后，理所当然地考虑复数域上的微积分，这就形成了复分析.

复分析既然是复数域上的微积分，那么它的内容应该有两个部分，一部分是从实数域上的微积分直接地平引推广过来，这部分的建立往往无多大困难. 另一部分是实数域上的微积分所没有的，不能直接地推广过来，前一部分当然重要，但后一部分往往更为引人

注意.

原有微积分由三个部分所组成，即：微分、积分和指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，这些都没有什么困难地推广到复数域上来，值得一提的是，微积分基本定理到了复数域上将变成什么样？在复平面 $\mathscr{C}$ 上，这成为复形式的格林公式：若 $\omega=\omega_1 \mathrm{d}z+\omega_2\,\overline{\mathrm{d}z}$ 为域 $\Omega\subset\mathscr{C}$ 上的一次外微分形式，这里 $\omega_1=\omega_1(z,\bar{z})$，$\omega_2=\omega_2(z,\bar{z})$，均为 z，$\bar{z}$ 的可微函数，d 为外微分算子，即 $\mathrm{d}=\partial+\bar{\partial}$，而 $\partial=\frac{\partial}{\partial z}$，$\bar{\partial}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，记 Ω 的边界为 $\partial\Omega$，则

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\iint_{\Omega}\mathrm{d}\omega .$$

这就是公式（6.3）在复平面上的形式，由此出发就可以得到著名的柯西积分公式与柯西积分定理，柯西积分公式说：若 L 是一条逐段光滑的闭若尔当（Marie Ennemond Camille Jordan, 1838.1.5—1921.1.22）曲线，$f(z)$是在曲线上及由曲线包围的内部连续，且在其内部解析，则在区域内的任一点 z，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\gamma)\mathrm{d}\gamma}{\gamma-z}$$

成立．柯西积分定理说：假设如上，则

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=0.$$

柯西积分定理是他在 1825 年证明的，但直到 1874 年才发表[1]，且未收入到他的全集中．当然，柯西原来的证明不是外微分形式的，他还假设了$f'(z)$在 L 上是连续的．柯西积分公式是他在 1831 年证明的[2]，他还假设了$f(z)$在 L 上解析．后来古尔萨

[1] Cauchy. A. L, Bull. des sci. Math. 7 (1874) 265～304; 8 (1875) 43～55, 148～159 及 Qeuvrescompletes, ser. 1, 4. Paris, 1890.

[2] Cauchy. A. L, Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul applé calcul des limites, Turin, 1831.

去掉了这些条件[1]，不难证明：柯西积分定理与柯西积分公式是相互等价的.

1825 年和 1831 年柯西两条定理的建立，是复分析中的一个重大里程碑，这标志着复分析中三个主要内容之一，柯西理论的诞生. 从这两条定理出发，可以得到一系列的重要的结果，愈来愈显示出复分析与原有的微积分质的不同. 但从上面的叙述中，可以看出柯西理论与原有微积分的血缘关系.

就在柯西为建立复分析而努力的时候，另外还有两位大数学家也正在从不同角度为建立复分析而努力.

一位是维尔斯特拉斯，他以其治学严谨，逻辑严密的特点来考虑复分析. 他从幂级数出发，所以他的复分析理论是级数理论，在原有的微积分中已有级数理论，如泰勒级数等，这一套理论可以不很困难地推广到复数域上. 但在复数域上的微积分中，还有洛朗(Pierre Aphonse Laurent，1813.7.18—1854.9.2) 级数，这是原有微积分中所没有的，人们以此来刻画奇点，研究亚纯函数等等. 洛朗级数来源于 1843 年洛朗建立的定理. 圆环 $D=\{0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ 内的任一单值解析函数 $f(z)$ 在 D 内可由一个收敛的洛朗级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z-a)^k$$

来表示. 事实上，维尔斯特拉斯于 1841 年已经研究了具有正、负幂的级数，即洛朗级数，只是他的一些早期论文一直未付印，直到他的全集第一卷刊印时才发表，但那时已是 1894 年了[2]，维尔斯特拉斯的级数理论有着极为丰富的内容.

---

[1] Goursat. É, Sur la definition générale des fonctions analytiques dépres Cauchy, Tran. Amer. Math. Soe. 4 (1900) 14～16.

[2] Weierstrass. K, Darstellung linear analytischen Funktion liner complexen Veränderlichen, deren also luter Betrag zwischen gegebenen Grenzen liegt, Mathemetische werke, Johuson, I, p. 51～66.

另一位数学家黎曼，他从几何的观点来考察分析，即将函数看作从一个区域到另一个区域的映照. 他还引入了一个全新的几何概念，即黎曼曲面，引入这种曲面的出发点是为了对多值函数进行研究，这套理论是原有微积分中所没有的. 黎曼 1851 年的博士论文〔1〕是数学史上的一篇重要文献. 正如著名数学家阿尔福斯 (Lars Valerian Ahlfors, 1907. 4. 18—?) 所说的，这篇论文不仅包含了现代复变函数论主要部分的萌芽，而且开启了拓扑学的系统研究，革新了代数几何，并为黎曼自己的微分几何研究铺平了道路. 在此文中不但引入了黎曼面，还证明了如下的著名的黎曼映照定理：若 D 为复平面 $\mathscr{C}$ 上的单连通区域，其边界点至少有两点，则存在 D 上的单叶全纯函数，将 D 映照为单位圆 $\Delta=\{z\in\mathscr{C}, |z|<1\}$，若 $a\in D$，$b\in\Delta$，$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，则满足 $f(a)=b, \arg f'(a)=\alpha$ 的 f 是惟一的. 这个定理说：拓扑等价导出全纯等价. 当时黎曼是用狄利克雷 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805.2.13—1859.5.5) 原理来证明此定理的，但这个原理当时被看出有毛病，以至数学家企图寻求一个正确的证明，后来 1870 年由诺伊曼 (Carl Gottfried Neumann, 1832.5.7—1925.3.27) 与施瓦茨 (Hermann Amandus Schwarz, 1843.1.25—1921.11.30) 找到了.

黎曼映照定理是复变数几何函数论的出发点，从此之后，发展了一整套优美而重要的理论.

1825 年，1831 年开始的柯西理论，1841 年开始的维尔斯特拉斯级数理论，1851 年开始的黎曼几何理论，这三套相对独立又紧密联系着的理论，构成了复数域上的微积分，成为复分析的主要部分. 在这散套理论中，柯西积分理论根在原来的微积分，这点是比较清楚的（尽管后来发展的理论已与原有的微积分相距甚远）. 而

---

〔1〕 Riemann. G. F. B, Grundlagen für eien Allgemeine Theorie der Funktionen eienr Veränderlichen Complex Grösse, 1851.

维尔斯特拉斯的级数理论的来源之一是微积分中的级数理论，这点也比较清楚，但起主要作用的洛朗级数都是原有微积分中所没有的．至于黎曼几何理论则是全新的理论，与原来的微积分没有什么关系．

另一方面，柯西积分理论中大部分的结果，可以推广到高维空间，而在维尔斯特拉斯级数理论中起主要作用的洛朗级数及黎曼几何理论的出发点——黎曼映照定理却不能推广到高维空间．

1906 年，比利时数学家哈托格斯（Friedrich M. Hartogs, 1874－1943）证明了如下的定理[1]：若 $\Omega \subseteq \mathscr{C}^n$，$2 \leqslant n$ 为域，k 为 Ω 中紧致子集，且 Ω / k 连通，若 f 在 Ω / k 上全纯，则 f 可以全纯开拓到 Ω．因此，想把 $\mathscr{C}$ 中的圆环拓展成 $\mathscr{C}^n$ $(2 \leqslant n)$ 中的球挖去一个小球后的球壳上将全纯映照展开成具有正、负次幂的幂级数成为毫无意义的事了．因此，作为维尔斯特拉斯级数理论中的主要部分的洛朗级数，是原先的微积分中所没有的，在高维复空间中也是没有的，只有复平面上有．

1907 年，庞加莱证明了这样的定理[2]：在 $\mathscr{C}^n$ $(2 \leqslant n)$ 中的单位球 $B = \{z \in \mathscr{C}^n : |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ 与多圆柱 $P = \{z \in \mathscr{C}^n : |z_1| < 1, \cdots, |z_n| < 1\}$ 之间是不存在全纯映照将 B 映为 P 的，这里 $z = (z_1, \cdots, z_n)$．也就是说，到了 $\mathscr{C}^n$，当 $2 \leqslant n$ 时，区域之间的拓扑等价不能导出全纯等价．因此，作为单复变几何函数论的基石的黎曼映照定理也是前无古人，后无来者的．

也正因为如此，这些内容成为复数域上的微积分，即复分析中所独有的理论，形成了丰富的内容．

---

〔1〕Hartogs. F, Zur theorie der analytischen Funktionen meherer unalhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derseler durch Reihen welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortschafen, Math. Ann. 62 (1906) 1～88.

〔2〕Poincaré, H, Les fonctions analytiqes de deccx varia et la représentation conforme, Rend. Circ. Mat. Polermo, 23 (1907) 185～220.

对于微积分完成了严格化之后，作为微积分本身的理论是怎样向前发展的，就说到这里，这里所说的三个方向还可以说得很多很多，但应到此为止为好.

事实上，“严格化”是相对的，人们对数学理论的认识往往是从不严格开始的，只要大方向正确，等到理论建立起来后再严格化也是可以的，过了一段时间，也许会发现已有的“严格化”又不够严格了，于是再进一步严格化. 例如：前面说到的实变函数是微积分的又一步的严格化，克服了微积分中原有的种种缺陷与不足之处，但实变函数本身也又有缺陷与不足之处，如罗素（Bertrand Arthur William，1872.5.18—1970.2.2，英国）悖论引发的“数学危机”等，还需进一步的严格化. 数学的理论就是这样一步步地向前发展的. 如果设想牛顿和莱布尼茨当时感到他们创立的微积分的理论不够严格而不予发表，那么微积分的发展及由它而引起的17世纪以来自然科学的大发展就会被推迟，这对世界来讲是多么大的损失呀！事实上，这种“不严格”丝毫也不影响其对自然科学的巨大推动作用. 如果一定要拘泥于所谓“严格”，并以此理由扼杀微积分，那么这就是科学上是倒退. 正确的态度应该是一方面努力发挥微积分在自然科学中的威力，一方面来想方设法使其严格化. 200年来，这两种截然不同的、相互对立的态度一直存在，直到微积分严格化完成. 在历史上，建立起并应用一些数学理论，开始并不严格，然后走向严格化的例子屡见不鲜. 例如：前面已经说到黎曼关于黎曼映照定理的证明，开始是不严格的，后人将它严格化；δ 函数及广义函数诞生并应用了很长时间，才给出它的严格的理论等等. 直到最近维尔斯（A. Wiles）关于费马大定理的证明也是从不严格走向严格的.

笔者这样说，并非提倡做数学研究可以不严格，而只是不赞成用所谓“严格”来束缚自己的手脚. 想想我们自己做数学研究，都是在一些重大的、关键的步骤上想清楚了，才去一步步地使其严格

化，如果一开始就要求每一步都要严格，那么很可能抓了芝麻丢了西瓜，抓不住解决问题的要害而寸步难行.

笔者也不赞成在数学教学中过分强调所谓“严格化”. 例如，对学生讲述一条定理，有多少条件才能成立，于是，就对学生举出一个个反例，说少了这个条件也不成立，少了那个条件也不成立，使得学生谨小慎微，战战兢兢，不敢越雷池一步，惟恐出错，这样很难培养出学生的创新能力. 其实在一条定理中，各种条件有主次之分，举一些反例也许是必要的，将各种条件反反复复抠得过细，未必是培养有气魄的数学家的好办法.

数学当然是要严格的，这是天经地义的事. 但在什么意义下严格化，如何严格化却是值得思索的问题，不能因严格化而阻碍数学的发展，而应该用严格化来促进数学的发展，这才是正确的道路.

[General Information]
书名=简明微积分发展史
作者=龚升，林立军著
页数=175
SS号=12146948
DX号=
出版日期=2005.2
出版社=湖南教育出版社